Άσκηση 111

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

i) Να βρείτε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Δίνεται $h(x) = (f \circ g)(x) = \dfrac{\ln x}{1+\ln^2 x}$, $x > 0$

ii) Να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iii) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{-\kappa}^{\kappa} \left| h\left(e^{x^2}+1\right) \right| dx < \kappa$, $\kappa > 0$.

Επιπλέον, δίνεται H αρχική της h με $H(1) = 0$

iv) α΄) Να αποδείξετε ότι $H(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

β΄) Να δείξετε ότι $H(x) - H(e^2) \leq \dfrac{2}{5}x - \dfrac{2}{5}e^2$ για κάθε $x \in [e, +\infty)$.

v) Να υπολογίσετε το όριο $\displaystyle\lim_{x \to 1} \dfrac{e^{H(x)}-1}{(\ln x)^2}$.

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2}H(x)$, $x \in (0, +\infty)$

vi) Έστω E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_φ, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = e$. Να δείξετε ότι $E = \dfrac{\ln 2}{2} - \dfrac{H(e)}{e}$.

Λύση

i) Είναι $D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x > 0 \mid \ln x \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$

Για κάθε $x > 0$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{\ln x}{1 + \ln^2 x}$$

Συνεπώς, $h(x) = \dfrac{\ln x}{1 + \ln^2 x}$, $x \in (0, +\infty)$

ii) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1 + \ln^2 x) - \ln x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{(1 + \ln^2 x)^2} = \frac{1 - \ln^2 x}{x(1 + \ln^2 x)^2}$$

Οι ρίζες και το πρόσημο της h' εξαρτώνται από τον αριθμητή $1 - \ln^2 x$

- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln^2 x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \pm 1 \Leftrightarrow x = e$ ή $x = \dfrac{1}{e}$
- $h'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln^2 x > 0 \Leftrightarrow -1 < \ln x < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{e} < x < e$

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	0	$-$	
h	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0
			OE $f(e^{-1}) = -\frac{1}{2}$		OM $f(e) = \frac{1}{2}$		

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1 + \ln^2 x} \overset{u \to -\infty}{\underset{\ln x = u}{=}} \lim_{u\to -\infty} \frac{u}{1 + u^2} = \lim_{u\to -\infty} \frac{u}{u^2} = \lim_{u\to -\infty} \frac{1}{u} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{1 + \ln^2 x} \overset{u \to +\infty}{\underset{\ln x = u}{=}} \lim_{u\to +\infty} \frac{u}{1 + u^2} = \lim_{u\to +\infty} \frac{u}{u^2} = \lim_{u\to +\infty} \frac{1}{u} = 0$

Επειδή η h είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ με ολικό ελάχιστο το $-\dfrac{1}{2}$ και ολικό μέγιστο το $\dfrac{1}{2}$, το σύνολο τιμών της είναι

$$h(A) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

iii) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει

$$-\frac{1}{2} \le h(x) \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow |h(x)| \le \frac{1}{2}$$

και το = μόνο για $x = \dfrac{1}{e}$ και $x = e$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^{x^2}+1>0$, οπότε $\left|h\left(e^{x^2}+1\right)\right| \leq \dfrac{1}{2}$ άρα

$$\int_{-\kappa}^{\kappa} \left|h\left(e^{x^2}+1\right)\right| dx < \int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}\Big(\kappa-(-\kappa)\Big) = \frac{1}{2}\cdot 2\kappa = \kappa$$

iv) α′) Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ είναι $H'(x) = h(x) = \dfrac{\ln x}{1+\ln^2 x}$.

$$H'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{1+\ln^2 x}=0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x=1$$

- $H'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x>1$
- $H'(x)<0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow 0<x<1$

x	0		1		$+\infty$
H'		$-$	0	$+$	
H		$\searrow$		$\nearrow$	
			OE $H(1)=0$		

η H παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $H(1)=0$ άρα $H(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$ και το = μόνο για $x=1$

β′) Είναι

$$H''(x) = h'(x) = \frac{1-\ln^2 x}{x(1+\ln^2 x)^2}$$

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
H''		$-$	0	$+$	0	$-$	
H		$\frown$		$\smile$		$\frown$	
			ΣΚ		ΣΚ		

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_H στο $x_0=e^2$ είναι

$$y-H(e^2) = H'(e^2)(x-e^2) \Rightarrow y-H(e^2) = h(e^2)(x-e^2)$$

$$y=\frac{2}{5}(x-e^2)+H(e^2)$$

Επειδή η H είναι κοίλη στο $(e,+\infty)$, η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της σε κάθε σημείο με εξαίρεση το σημείο επαφής. Άρα για κάθε $x \in [e,+\infty)$ ισχύει

$$H(x) \le \frac{2}{5}(x-e^2) + H(e^2) \Rightarrow H(x) - H(e^2) \le \frac{2}{5}x - \frac{2e^2}{5}$$

v) Είναι

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{H(x)}-1}{\ln^2 x} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 1} \frac{e^{H(x)}\cdot H'(x)}{2\ln x \cdot \dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{e^{H(x)}\cdot x}{2}\cdot\frac{h(x)}{\ln x}\right) =$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{e^{H(x)}\cdot x}{2}\cdot\frac{\dfrac{\ln x}{1+\ln^2 x}}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{e^{H(x)}}{2}\cdot\frac{x}{1+\ln^2 x}\right) = \frac{1}{2}$$

vi) Είναι $H(x) \ge 0$ και $x^2 > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ άρα ισχύει $\varphi(x) \ge 0$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου είναι

$$E = \int_1^e \frac{1}{x^2}H(x)dx = \int_1^e \left(-\frac{1}{x}\right)' H(x)dx = \left[-\frac{H(x)}{x}\right]_1^e - \int_1^e \left(-\frac{1}{x}\right) H'(x)dx =$$

$$-\frac{H(e)}{e} + \int_1^e \frac{1}{x}h(x)\,dx = -\frac{H(e)}{e} + \int_1^e \frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)}dx$$

Θέτω $u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx$

- Για $x = 1 \Rightarrow u = \ln 1 = 0$
- Για $x = e \Rightarrow u = \ln e = 1$

άρα

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)}dx = \int_0^1 \frac{u}{1+u^2}du = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2u}{1+u^2}du = \frac{1}{2}\Big[\ln(1+u^2)\Big]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$$

Οπότε

$$E = \frac{\ln 2}{2} - \frac{H(e)}{e}$$