Άσκηση 112

Δίνεται συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν:

- $(x+1)\left(xg'(x)+g(x)\right)=1$ για κάθε $x>0$
- $g(1)=\ln 2$
- $g(0)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{2x-1}+\eta\mu(x-1)}{x-1}$
- g κυρτή στο $(0,+\infty)$

i) Να αποδείξετε ότι $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x+1)}{x} & ,\ x>0\\ 1 & ,\ x=0\end{cases}$.

ii) α′) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο σημείο $M(0,1)$.

β′) Να δείξετε ότι $g'(x)\geq -\dfrac{1}{2}$ για κάθε $x\geq 0$.

γ′) Να βρείτε την ασύμπτωτη της $C_{g'}$ στο $+\infty$.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση

$$\Phi(x)=\int_0^{\ln 2}\left(G(e^x)-\frac{1}{\ln 2}\right)dx\cdot x^3+\frac{1}{2}x^2-\int_1^2 G''(x)dx\cdot x+2026\ ,\ \ x\in\mathbb{R}$$

όπου G αρχική της g με $G(0)=0$.

iii) α′) Να δείξετε ότι $G(x)\leq x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

β′) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση Φ έχει στις θέσεις x_1,x_2 τοπικά ακρότατα με $x_1<0<x_2$ και $x_2>-x_1$.

Λύση

i) Για κάθε $x>0$ έχουμε

$$(x+1)\left(xg'(x)+g(x)\right)=1 \Leftrightarrow xg'(x)+g(x)=\frac{1}{x+1} \Leftrightarrow (xg(x))'=(\ln(x+1))'$$

άρα από συνέπειες ΘΜΤ

$$xg(x)=\ln(x+1)+c$$

Για $x=1$ έχουμε $1\cdot g(1)=\ln 2+c \Rightarrow \ln 2=\ln 2+c \Rightarrow c=0$

Άρα, για κάθε $x>0$ είναι $xg(x)=\ln(x+1) \Rightarrow g(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ και

$$g(0)=\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{2x-1}+\etaμ(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{2x-1}}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{\etaμ(x-1)}{x-1}$$

- είναι

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{2x-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-(\sqrt{2x-1})^2}{(x-1)(x+\sqrt{2x-1})}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{(x-1)(x+\sqrt{2x-1})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+\sqrt{2x-1})}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+\sqrt{2x-1}}=0$$

- και

$$\lim_{x\to 1}\frac{\etaμ(x-1)}{x-1}\overset{u=x-1}{=}\lim_{u\to 0}\frac{\etaμ u}{u}=1$$

άρα $g(0)=0+1=1$ οπότε $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x+1)}{x} & , \ x>0\\ 1 & , \ x=0\end{cases}$

ii) α′) Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\ln(x+1)}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+1}-1}{2x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-x}{x+1}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(x+1)}=-\frac{1}{2}$$

άρα $g'(0)=-\dfrac{1}{2}$ οπότε η εφαπτομένη της C_g στο $M(0,1)$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): y-g(0)=g'(0)(x-0) \Rightarrow y-1=-\frac{1}{2}x \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+1$$

β′) Είναι $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2} & , \ x>0\\ -\dfrac{1}{2} & , \ x=0\end{cases}$

Για $x > 0$ η g' είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και

$$\lim_{x\to 0^+} g'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x+1}}{2x} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{-x}{(x+1)^2}}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{2(x+1)^2} = -\frac{1}{2} = g'(0)$$

άρα η g' είναι συνεχής στο 0, οπότε είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$

Εφόσον η g είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και επειδή είναι συνεχής στο 0 η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Άρα, για κάθε $x \geq 0$ ισχύει

$$x \geq 0 \Leftrightarrow g'(x) \geq g'(0) \Leftrightarrow g'(x) \geq -\frac{1}{2}$$

γ΄) Έχουμε

$$\lim_{x\to +\infty} g'(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\dfrac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2}$$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\dfrac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x+1}}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-1}{2(x+1)^2} = 0$$

άρα η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C_{g'}$ στο $-\infty$

iii) α΄) Η συνάρτηση G είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $G'(x) = g(x)$ και $G''(x) = g'(x)$

Είναι $G''(x) = g'(x) < 0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$ άρα G είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$, οπότε η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάντοτε κάτω από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο, με εξαίρεση το σημείο επαφής

Η εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_G στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ είναι

$$y - G(0) = G'(0)(x-0) \Rightarrow y = g(0)x \Rightarrow y = x$$

άρα $G(x) \leq x$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$ και το = μόνο για $x = 0$

β΄) Είναι

$$\Phi(x) = \int_0^{\ln 2} \left(G(e^x) - \frac{1}{\ln 2}\right) dx \cdot x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \int_1^2 G''(x)dx \cdot x + 2026 \ ,\ x \in \mathbb{R}$$

Η Φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$\Phi'(x) = 3\left[\int_0^{\ln 2}\left(G(e^x) - \frac{1}{\ln 2}\right)dx\right]\cdot x^2 + x - \int_1^2 G''(x)dx$$

- Είναι $G''(x) < 0$ για κάθε $x \geq 0$ άρα και $\int_1^2 G''(x)dx < 0$
- Είναι $G(x) \leq x$ για κάθε $x > 0$ και το $=$ για $x = 0 \overset{e^x>0}{\Rightarrow} G(e^x) < e^x$ άρα

  $$\int_0^{\ln 2} G(e^x)dx < \int_0^{\ln 2} e^x dx = \left[e^x\right]_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} - 1 = 1$$

  οπότε

  $$\int_0^{\ln 2}\left(G(e^x) - \frac{1}{\ln 2}\right)dx = \int_0^{\ln 2} G(e^x)dx - \int_0^{\ln 2}\frac{1}{\ln 2}dx < 1 - \frac{1}{\ln 2}\cdot\ln 2 = 0$$

άρα

$$\Phi'(x) = 3\underbrace{\left[\int_0^{\ln 2}\left(G(e^x) - \frac{1}{\ln 2}\right)dx\right]}_{\kappa<0}\cdot x^2 + x - \underbrace{\int_1^2 G''(x)dx}_{\lambda<0}$$

Είναι $\Delta = 1 + 12\kappa\lambda > 0$ άρα η Φ' έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες $x_1 < x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Φ'		$-$	0	$+$	0	$-$	
Φ	$+\infty$ ↘			↗		↘	$-\infty$
			TE		TM		

με

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{\lambda}{3\kappa} < 0 \Rightarrow x_1 < 0 < x_2$$

και

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{3\kappa} > 0 \Rightarrow x_2 > -x_1$$