Άσκηση 113

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\Rightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} e^{x+\alpha} & , \ x<1 \\ (x-1)^2+x & , \ x\geq 1 \end{cases}$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha=-1$.

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1,f(1))$.

iii) Να αποδείξετε ότι $f(e^{x-1})-e^{x-1}\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iv) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η αντίστροφη.

Έστω $f^{-1}(x)=\begin{cases} \ln x+1 & , \ x\in(0,1) \\ \dfrac{1}{2}+\sqrt{x-\dfrac{3}{4}} & , \ x\in[1,+\infty) \end{cases}$.

v) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, την $y=x$ και τις ευθείες $x=\dfrac{1}{e}$, $x=3$.

vi) Να λυθεί η εξίσωση $f\left(f^{-1}(e^{x^2-1})\right)=x^2$.

vii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}[(f(x)-x)\cdot\ln(x-1)]$.

Λύση

i) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $x_0 = 1$. Συνεπώς ισχύει

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} e^{x+\alpha} = e^{1+\alpha}$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1$

Άρα $e^{1+\alpha} = 1 \Leftrightarrow 1+\alpha = 0 \iff \alpha = -1$.

Για $\alpha = -1$ η συνάρτηση γίνεται $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & , \ x < 1 \\ (x-1)^2 + x & , \ x \geq 1 \end{cases}$

ii) Είναι

- $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{e^{x-1}-1}{x-1} \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{e^{x-1}}{1} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)^2+x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)(x-1+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} x = 1$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 1$

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 1 = 1(x-1) \Leftrightarrow y = x$$

iii) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x-1} & , \ x < 1 \\ 2x - 1 & , \ x \geq 1 \end{cases}$$

και

$$f''(x) = \begin{cases} e^{x-1} & , \ x < 1 \\ 2 & , \ x > 1 \end{cases}$$

Είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \neq 1$ και f συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

Επομένως η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη στο $x_0 = 1$ με εξαίρεση το σημείο επαφής, οπότε

$$f(x) \geq x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και το = μόνο για $x = 1$

άρα

$$f(e^{x-1}) \geq e^{x-1} \Leftrightarrow f(e^{x-1}) - e^{x-1} \geq 0$$

και το = μόνο για $e^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

iv) Είναι $f'(x) = \begin{cases} e^{x-1} & , \ x < 1 \\ 2x - 1 & , \ x \geq 1 \end{cases}$

δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα 1-1 και αντιστρέφεται

- Για $x < 1$

$$y = e^{x-1} \Leftrightarrow \ln y = x - 1 \Leftrightarrow x = \ln y + 1$$

Πρέπει $x < 1 \Leftrightarrow \ln y + 1 < 1 \Leftrightarrow \ln y < 0 \Leftrightarrow 0 < y < 1$

- Για $x \geq 1$

$$y = (x-1)^2 + x \Leftrightarrow y = x^2 - 2x + 1 + x \Leftrightarrow y = x^2 - x + 1$$

$$y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 \Leftrightarrow y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \Rightarrow y - \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \overset{x \geq 1}{\Rightarrow}$$

$$x - \frac{1}{2} = \sqrt{y - \frac{3}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{3}{4}}$$

Πρέπει $x \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{3}{4}} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{y - \frac{3}{4}} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow y - \frac{3}{4} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow y \geq 1$

Επομένως, $f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln x + 1 & , \ x \in (0,1) \\ \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}} & , \ x \in [1, +\infty) \end{cases}$

v) Το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με

$$E(\Omega) = \int_{\frac{1}{e}}^{3} |f^{-1}(x) - x| \, dx$$

Είναι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq x \Leftrightarrow f^{-1}(x) \leq x$ για κάθε $x > 0$. Συνεπώς

$$E(\Omega) = \int_{\frac{1}{e}}^{3} (x - f^{-1}(x)) \, dx = \underbrace{\int_{\frac{1}{e}}^{1} (x - \ln x - 1) \, dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{1}^{3} \left(x - \frac{1}{2} - \sqrt{x - \frac{3}{4}}\right) dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{1} (x - 1 - \ln x) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - \int_{\frac{1}{e}}^{1} (x)' \ln x \, dx =$$

$$\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - \Big[x \ln x\Big]_{\frac{1}{e}}^{1} + \int_{\frac{1}{e}}^{1} 1 \, dx =$$

$$\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - \Big[x \ln x\Big]_{\frac{1}{e}}^{1} + \Big[x\Big]_{\frac{1}{e}}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{e}$$

$$I_2 = \int_1^3 \left(x - \frac{1}{2} - \left(x - \frac{3}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{2\left(x - \frac{3}{4} \right)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_1^3 =$$

$$= \left[\frac{x^2 - x}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{\left(x - \frac{3}{4} \right)^3} \right]_1^3 = \frac{5}{6}$$

Συνεπώς,

$$E(\Omega) = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{e} + \frac{5}{6} = \frac{4}{3} - \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{e}$$

vi) Πρέπει $e^{x^2-1} > 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$f\left(f^{-1}(e^{x^2-1})\right) = x^2 \Leftrightarrow e^{x^2-1} = x^2$$

Θέτω $u = x^2 - 1$, οπότε η εξίσωση γράφεται $e^u = u + 1$ Είναι $e^u \geq u + 1$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$ και το = μόνο για $u = 0$. Συνεπώς

$$e^u = u + 1 \Leftrightarrow u = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

vii) Είναι

$$\lim_{x \to 1^+} \left[(f(x) - x) \cdot \ln(x-1) \right] = \lim_{x \to 1^+} \left[\frac{f(x) - x}{x - 1} \cdot (x-1)\ln(x-1) \right]$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \left[\left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} - 1 \right) \cdot (x-1)\ln(x-1) \right] = (f'(1) - 1) \cdot 0 = (1 - 1) \cdot 0 = 0$$

αφού

$$\lim_{x \to 1^+} \left[(x-1)\ln(x-1) \right] \overset{u = x - 1}{=} \lim_{u \to 0^+} u \ln u \overset{DLH}{=} \lim_{u \to 0^+} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} = \lim_{u \to 0^+} \frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = \lim_{u \to 0^+} -u = 0$$