

Άσκηση 114

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \ln x - e^x$, $x > 0$ και $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

i) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Έστω $h(x) = f(g(x)) = \ln(\ln x) - x$, $x \in (1, +\infty)$

ii) Να αποδείξετε ότι $h(x) \leq h(x_0)$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, όπου $x_0 \in (1, 2)$.

iii) Να αποδείξετε ότι η h είναι αντιστρέψιμη στο $[x_0, +\infty)$ και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της h^{-1} .

iv) α') Να αποδείξετε ότι $e(h(x) + 1) \leq (1 - e)x$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

β') Να δείξετε ότι $\int_1^2 h(e^x) dx < -(e - 1)^2 - 1$.

v) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha') \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)}{\ln(x - 1)}.$$

$$\beta') \lim_{x \rightarrow h(x_0)} \frac{\eta\mu x - x}{h^{-1}(x) - x_0}.$$

Λύση

i) Είναι

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x > 0 \mid \ln x > 0\} = (1, +\infty)$$

και

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln(\ln x) - e^{\ln x} = \ln(\ln x) - x$$

Συνεπώς, $h(x) = \ln(\ln x) - x$, $x \in (1, +\infty)$.

ii) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με

$$h'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x \ln x}{x \ln x}$$

Θέτω $k(x) = 1 - x \ln x$, $x \in [1, +\infty)$

- Η k είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πράξεις συνεχών
- $k(1) = 1 > 0$
- $k(2) = 1 - 2 \ln 2 = 1 - \ln 4 < 0$

άρα από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$k(x_0) = 0 \Leftrightarrow 1 - x_0 \ln x_0 = 0 \Leftrightarrow h'(x_0) = 0$$

Είναι $k'(x) = -\ln x - 1 < 0$ για κάθε $x \geq 1$ άρα η k είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$

- Για $1 < x < x_0 \Rightarrow k(x) > k(x_0) = 0 \Rightarrow h'(x) > 0$
- Για $x > x_0 \Rightarrow k(x) < k(x_0) = 0 \Rightarrow h'(x) < 0$

x	1	x_0	$+\infty$
h'		+	0
h		$-\infty$	$-\infty$

OM
 $h(x_0)$

Η h παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_0 άρα $h(x) \leq h(x_0)$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$

iii) Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, +\infty)$, επομένως είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται και συνεχής άρα

$$D_{h^{-1}} = h([x_0, +\infty)) = (-\infty, h(x_0)]$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{\ln(\ln x)}{x} - 1 \right) \right] = (+\infty)(0 - 1) = -\infty$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln x} = 0$$

iv) α') Είναι

$$e(h(x) + 1) \leq (1 - e)x \Leftrightarrow eh(x) + e \leq x - ex \Leftrightarrow h(x) \leq \frac{1 - e}{e}x - 1$$

Η συνάρτηση $h(x) = \ln(\ln x) - x$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με

$$h''(x) = \left(\frac{1}{x \ln x} - 1 \right)' = -\frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x}$$

Είναι $h''(x) < 0$ για κάθε $x > 1$ άρα η h είναι κοίλη στο $(1, +\infty)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_h στο σημείο $x_1 = e$ είναι

$$y - h(e) = h'(e)(x - e) \Rightarrow y + e = \frac{1 - e}{e}x - (1 - e) \Leftrightarrow y = \frac{1 - e}{e}x - 1$$

Επειδή η h είναι κοίλη στο $(1, +\infty)$ η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της σε κάθε σημείο εκτός από το σημείο επαφής. Επομένως, για κάθε $x \in (1, +\infty)$ ισχύει

$$h(x) \leq y \Rightarrow h(x) \leq \frac{1 - e}{e}x - 1$$

και το = μόνο για $x = e$

β') Έχουμε ότι $h(x) \leq \frac{1 - e}{e}x - 1$ για κάθε $x > 1$ και το = μόνο για $x = e$

Για κάθε $x \in [1, 2]$ είναι $e^x \in [e, e^2] \subset (1, +\infty)$, οπότε

$$h(e^x) \leq \frac{1 - e}{e}e^x - 1$$

και το = για $e^x = e \Leftrightarrow x = 1$, άρα

$$\int_1^2 h(e^x) dx < \int_1^2 \left(\frac{1 - e}{e}e^x - 1 \right) dx$$

με

$$\int_1^2 \left(\frac{1 - e}{e}e^x - 1 \right) dx = \left[\frac{1 - e}{e}e^x - x \right]_1^2 = e - e^2 - 2 - 1 + e + 1 = -(e - 1)^2 - 1$$

οπότε

$$\int_1^2 h(e^x) dx < -(e - 1)^2 - 1$$

v) α') Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) = -\infty$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x)}{\ln(x-1)} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h'(x)}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1-x \ln x}{x \ln x}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1-x \ln x}{x \ln x} \cdot (x-1) \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1-x \ln x}{x} \cdot \frac{x-1}{\ln x} \right] = \frac{1-0}{1} \cdot 1 = 1$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\ln x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$

β') Είναι

$$\lim_{x \rightarrow h(x_0)} \frac{\eta \mu x - x}{h^{-1}(x) - x_0} = \lim_{x \rightarrow h(x_0)} \left[(\eta \mu x - x) \cdot \frac{1}{h^{-1}(x) - x_0} \right] = (\eta \mu(h(x_0)) - h(x_0)) (+\infty) = +\infty$$

διότι

$D_{h^{-1}} = (-\infty, h(x_0)]$ και h γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, +\infty)$, επομένως και h^{-1} γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, h(x_0)]$, άρα για κάθε $x \leq h(x_0)$ ισχύει

$$h^{-1}(x) \geq h^{-1}(h(x_0)) \Rightarrow h^{-1}(x) \geq x_0 \Rightarrow h^{-1}(x) - x_0 \geq 0$$

και το = μόνο για $x = h^{-1}(x_0)$

και $x_0 \in (1, 2) \Rightarrow x_0 < e \Leftrightarrow \ln x_0 < 1 \Leftrightarrow \ln(\ln x_0) < 0$ και $1 < x_0 < 2$ άρα

$$h(x_0) = \ln(\ln x_0) - x_0 < 0$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\eta \mu x| \leq |x|$ και το = για $x = 0$ άρα για $x < 0$ έχουμε

$$x < \eta \mu x \Leftrightarrow \eta \mu x - x > 0 \stackrel{u=h^{-1}(x_0)}{\Rightarrow} \eta \mu(h(x_0)) - h(x_0) > 0$$