

Άσκηση 115

Δίνεται η γνησίως μονότονη και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με f^{-1} συνεχή για την οποία ισχύουν:

- $f(0) = 2$

- $f(x) + f^{-1}(x) = \frac{5}{2}x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

ii) Να δείξετε ότι $f(2) = 3$.

iii) Να δείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx = 1 + \int_{-4}^0 f(x)dx$.

iv) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο σημεία με τετμημένες $x_1, x_2 \in (-4, 2)$ στα σημεία οι εφαπτόμενες της C_f να είναι παράλληλες στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$.

v) Να δείξετε ότι $2 \leq f(x) \leq \frac{5}{2}x + 2$ για κάθε $x \geq 0$.

vi) Να δείξετε ότι $3 \leq \int_{-4}^0 f(x)dx \leq 8$.

Λύση

i) Έχουμε

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = f^{-1}(0)$$

Είναι $f(x) + f^{-1}(x) = \frac{5}{2}x - 2$ και για $x = 0$ προκύπτει

$$f(0) + f^{-1}(0) = -2 \Rightarrow 2 + f^{-1}(0) = -2 \Rightarrow f^{-1}(0) = -4$$

άρα $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4$

ii) Για $x = f(0)$ η σχέση $f(x) + f^{-1}(x) = \frac{5}{2}x - 2$ γίνεται

$$f(f(0)) + f^{-1}(f(0)) = \frac{5}{2}f(0) - 2 \Rightarrow f(2) + 0 = 3 \Rightarrow f(2) = 3$$

iii) Είναι $f(x) + f^{-1}(x) = \frac{5}{2}x - 2$ οπότε ολοκληρώνοντας προκύπτει

$$\int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f^{-1}(x) dx = \int_0^2 \left(\frac{5}{2}x - 2 \right) dx \Rightarrow$$

$$\int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f^{-1}(x) dx = \left[\frac{5}{4}x^2 - 2x \right]_0^2 = (5 - 4) - 0 = 1$$

Έστω $I = \int_0^2 f^{-1}(x) dx$

Θέτω $x = f(u)$ οπότε $dx = f'(u) du$

- Για $x = 0 \Rightarrow f(u) = 0 \Rightarrow u = -4$
- Για $x = 2 \Rightarrow f(u) = 2 \Rightarrow u = 0$

άρα

$$I = \int_0^2 f^{-1}(x) dx = \int_{-4}^0 f^{-1}(f(u)) \cdot f'(u) du = \int_{-4}^0 u \cdot f'(u) du =$$
$$\left[u \cdot f(u) \right]_{-4}^0 - \int_{-4}^0 f(u) du = 0 - \int_{-4}^0 f(u) du = - \int_{-4}^0 f(u) du$$

οπότε

$$\int_0^2 f(x) dx - \int_{-4}^0 f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = 1 + \int_{-4}^0 f(x) dx$$

iv) Αρκεί να δείξω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-4, 2)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = \frac{1}{2}$

Από ΘΜΤ για την f στο $[-4, 0]$ και στο $[0, 2]$

- υπάρχει $x_1 \in (-4, 0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f(0) - f(-4)}{0 - (-4)} = \frac{2 - 0}{4} = \frac{1}{2}$$

- υπάρχει $x_2 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_2) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2}$$

v) Η f είναι γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} και ισχύει $-4 < 0$ με $f(-4) < f(0)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

Οπότε για κάθε $x \geq 0$ ισχύει

$$x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 2$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η f^{-1} είναι επίσης γνησίως αύξουσα. Για $x \geq 0$ έχουμε

$$x \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) \geq f^{-1}(0) \Rightarrow f^{-1}(x) \geq -4$$

και $f^{-1}(x) = \frac{5}{2}x - 2 - f(x)$, επομένως

$$f^{-1}(x) \geq -4 \Rightarrow \frac{5}{2}x - 2 - f(x) \geq -4 \Rightarrow f(x) \leq \frac{5}{2}x + 2$$

Επομένως, $2 \leq f(x) \leq \frac{5}{2}x + 2$ για κάθε $x \geq 0$

vi) Για κάθε $x \geq 0$ έχουμε $2 \leq f(x) \leq \frac{5}{2}x + 2$, οπότε

$$\begin{aligned} \int_0^2 2 \, dx &\leq \int_0^2 f(x) \, dx \leq \int_0^2 \left(\frac{5}{2}x + 2 \right) \, dx \Rightarrow \\ 2(2 - 0) &\leq \int_0^2 f(x) \, dx \leq \left[\frac{5}{4}x^2 + 2x \right]_0^2 \Rightarrow \\ 4 &\leq \int_0^2 f(x) \, dx \leq (5 + 4) - 0 \Rightarrow 4 \leq \int_0^2 f(x) \, dx \leq 9 \end{aligned}$$

όμως

$$\int_0^2 f(x) \, dx = 1 + \int_{-4}^0 f(x) \, dx$$

άρα

$$4 \leq 1 + \int_{-4}^0 f(x) \, dx \leq 9 \Rightarrow 3 \leq \int_{-4}^0 f(x) \, dx \leq 8$$