Άσκηση 116

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} \cdot \sqrt{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και περιττή.

ii) α′) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β′) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f.

Έστω $g = f^{-1}$ με $g(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x \geq 0 \\ -x^2 & , \ x < 0 \end{cases}$

iii) α′) Να αποδείξετε ότι η C_g για $x > 0$ και η C_f για $x < 0$ έχουν κοινή εφαπτομένη (ε_1), η οποία και να βρεθεί.

β′) Ευθεία $\varepsilon_2 \parallel \varepsilon_1$ εφάπτεται στις C_g για $x < 0$ και C_f για $x > 0$. Να βρεθεί η εξίσωσή της καθώς και τα σημεία επαφής.

iv) α′) Να δείξετε ότι $g(x) = x|x| \ , \ x \in \mathbb{R}$.

β′) Να δείξετε ότι $\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(x)dx = 0$, όπου $\varphi = f - g$ και $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

v) α′) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g.

β′) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g.

Λύση

Έχουμε

- Για $x > 0 : f(x) = \frac{x}{x} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x}$
- Για $x < 0 : f(x) = \frac{-x}{x} \cdot \sqrt{-x} = -\sqrt{-x}$
- Για $x = 0 : f(0) = 0$

οπότε η συνάρτηση f απλοποιείται στη μορφή $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , \ x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & , \ x < 0 \end{cases}$

i) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$

- Για $x \neq 0$ είναι $-x \neq 0$ και ισχύει

$$f(-x) = \frac{|-x|}{-x} \cdot \sqrt{|-x|} = \frac{|x|}{-x} \cdot \sqrt{|x|} = -\left(\frac{|x|}{x} \cdot \sqrt{|x|}\right) = -f(x)$$

- Για $x = 0$: $f(-0) = f(0) = 0 = -f(0)$.

Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(-x) = -f(x)$ οπότε η f είναι περιττή

Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ με

- $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ για $x > 0$
- $f'(x) = \left(-\sqrt{-x}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{-x}} \cdot (-1) = \frac{1}{2\sqrt{-x}} > 0$ για $x < 0$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 0$ (αφού $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = \lim_{x \to 0^-} (-\sqrt{-x}) = f(0) = 0$) και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

ii) α΄) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ είναι $1-1$, άρα είναι αντιστρέψιμη.

β΄) Θέτω $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

- Για $x \geq 0$ είναι $\sqrt{x} = y$, $y \geq 0$. Τότε

$$y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y^2 = x \Leftrightarrow f^{-1}(y) = y^2, \ y \geq 0$$

- Για $x < 0$ είναι $-\sqrt{-x} = y$, $y < 0$. Τότε

$$-\sqrt{-x} = y \Leftrightarrow \sqrt{-x} = -y \Leftrightarrow -x = (-y)^2 \Leftrightarrow x = -y^2 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = -y^2, \ y < 0$$

Επομένως $g(x) = f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x \geq 0 \\ -x^2 & , \ x < 0 \end{cases}$

iii) α΄) Για $x > 0$ είναι $g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x$

Για $x < 0$ είναι $f(x) = -\sqrt{-x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}$

Έστω $M(\alpha, g(\alpha))$ σημείο επαφής της C_g $(\alpha > 0)$ και $N(\beta, f(\beta))$ σημείο επαφής της C_f $(\beta < 0)$

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $M(\alpha, g(\alpha))$ είναι

$$y - g(\alpha) = g'(\alpha)(x - \alpha) \Rightarrow y - \alpha^2 = 2\alpha(x - \alpha) \Rightarrow y = 2\alpha x - \alpha^2$$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $N(\beta, f(\beta))$ είναι

$$y - f(\beta) = f'(\beta)(x - \beta) \Rightarrow y - (-\sqrt{-\beta}) = \frac{1}{2\sqrt{-\beta}}(x - \beta) \Rightarrow y = \frac{1}{2\sqrt{-\beta}}x - \frac{\sqrt{-\beta}}{2}$$

Για να ταυτίζονται οι δύο ευθείες πρέπει

$$\begin{cases} 2\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{-\beta}} \\ -\alpha^2 = -\dfrac{\sqrt{-\beta}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-\beta} = \dfrac{1}{4\alpha} \\ \alpha^3 = \dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2} \\ \beta = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

άρα η κοινή εφαπτομένη (ε_1) έχει εξίσωση

$$(\varepsilon_1) : y = x - \frac{1}{4}$$

β΄) Έστω $A(x_1, g(x_1))$ σημείο επαφής της C_g $(x_1 < 0)$ και $B(x_2, f(x_2))$ σημείο επαφής της C_f $(x_2 > 0)$

Είναι $\varepsilon_2 \parallel \varepsilon_1$ άρα $\lambda_{\varepsilon_2} = \lambda_{\varepsilon_1} = 1$ οπότε $(\varepsilon_2) : y = x + \beta$

Η ε_2 εφάπτεται στη C_g με $g(x) = -x^2$ άρα η εξίσωση $-x^2 = x + \beta \Leftrightarrow x^2 + x + \beta = 0$ έχει μοναδική λύση, δηλαδή $\Delta = 0$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 - 4\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{4}$$

Άρα η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης είναι

$$(\varepsilon_2) : y = x + \frac{1}{4}$$

και η τετμημένη του σημείου επαφής είναι η λύση της εξίσωσης, άρα

$$x_1 = -\frac{1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2} < 0$$

Για $x = -\dfrac{1}{2}$ είναι $y = -\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 = -\dfrac{1}{4}$, άρα το σημείο επαφής είναι το $A\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$

Η f είναι παραγωγίσιμη για $x>0$ με $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x_2)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_2}}=1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x_2}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x_2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_2=\frac{1}{4}>0$$

Για $x=\dfrac{1}{4}$, είναι $y=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$, άρα το σημείο επαφής είναι το $B\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$

Η εφαπτομένη της C_f στο B είναι

$$y-\frac{1}{2}=1\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow y=x-\frac{1}{4}+\frac{1}{2} \Leftrightarrow (\varepsilon_2): y=x+\frac{1}{4}$$

iv) α′) Είναι $g(x)=\begin{cases} x^2 & , \ x\geq 0 \\ -x^2 & , \ x<0 \end{cases}$

- Για $x\geq 0$ είναι $|x|=x$, οπότε $x|x|=x\cdot x=x^2$
- Για $x<0$ είναι $|x|=-x$, οπότε $x|x|=x(-x)=-x^2$

Συνεπώς, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)=x|x|$

β′) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $-x\in\mathbb{R}$ και $g(-x)=(-x)|-x|=-x|x|=-g(x)$, άρα η g είναι περιττή συνάρτηση

Επειδή οι f,g είναι περιττές η $\varphi=f-g$ είναι επίσης περιττή, αφού για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$ και

$$\varphi(-x)=f(-x)-g(-x)=-f(x)-(-g(x))=-(f(x)-g(x))=-\varphi(x)$$

Είναι

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi(x)\,dx=\underbrace{\int_{-\alpha}^{0}\varphi(x)\,dx}_{I_1}+\int_{0}^{\alpha}\varphi(x)\,dx$$

$$I_1=\int_{-\alpha}^{0}\varphi(x)\,dx \overset{u=-x}{=} \int_{\alpha}^{0}-\varphi(-u)du=\int_{\alpha}^{0}\varphi(u)\,du=-\int_{0}^{\alpha}\varphi(u)\,du$$

άρα

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi(x)\,dx=-\int_{0}^{\alpha}\varphi(x)\,dx+\int_{0}^{\alpha}\varphi(x)\,dx=0$$

v) α′)

- Για $x\geq 0$

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x}=x^2 \Leftrightarrow x=x^4 \Leftrightarrow x(x^3-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=1$$

- Για $x<0$

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow -\sqrt{-x}=-x^2 \Leftrightarrow -x=x^4 \Leftrightarrow x(x^3+1)=0 \Leftrightarrow x=-1$$

άρα τα κοινά σημεία των C_f, C_g είναι τα $(0,0)$, $(1,1)$ και $(-1,-1)$

β′) Είναι

$$E = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{-1}^{1} |\varphi(x)|\, dx = \underbrace{\int_{-1}^{0} |\varphi(x)|\, dx}_{I_1} + \int_{0}^{1} |\varphi(x)|\, dx$$

Έχουμε

$$I_1 = \int_{-1}^{0} |\varphi(x)|\, dx \overset{u=-x}{=} \int_{1}^{0} -|\varphi(-u)| du = -\int_{1}^{0} |\varphi(u)|\, du = \int_{0}^{1} |\varphi(u)|\, du$$

άρα

$$E = \int_{0}^{1} |\varphi(x)|\, dx + \int_{0}^{1} |\varphi(x)|\, dx = 2\int_{0}^{1} |\varphi(x)|\, dx$$

Στο διάστημα $[0,1]$ είναι $\varphi(x) \geq 0$, οπότε $|\varphi(x)| = \varphi(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - x^2$

Συνεπώς

$$E = 2\int_{0}^{1} (\sqrt{x} - x^2)\, dx = 2\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$