Άσκηση 117

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x - \dfrac{1}{2}x^2 & , \ x > 0 \\ \displaystyle\int_1^e (\kappa + \ln x)dx & , \ x = 0 \end{cases}$.

i) Να δείξετε ότι $\kappa = -\dfrac{1}{e-1}$.

ii) Να αποδείξετε ότι η C_f εφάπτεται της ευθείας $y = 0$ στην αρχή των αξόνων.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iv) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = |f(x)|$

v) α΄) Να δείξετε ότι η φ δεν είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $[0, +\infty)$.

β΄) Να μελετήσετε την φ ως προς τα ακρότατα.

Λύση

i) Η f είναι συνεχής στο 0 άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

Είναι

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2\right) = 0 - 0 = 0$$

αφού

$$\lim_{x\to 0^+} x^2\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

και

$$f(0) = \int_1^e (\kappa + \ln x)dx = \kappa(e-1) + \int_1^e (x)'\ln x dx = \kappa(e-1) + \Big[x\ln x - x\Big]_1^e = \kappa(e-1) + 1$$

Συνεπώς, $\kappa(e-1) + 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -\dfrac{1}{e-1}$

ii) Είναι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\left(x\ln x - \frac{1}{2}x\right) = 0 - 0 = 0$$

διότι

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Άρα $f'(0) = 0$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $(0, f(0))$ είναι

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y - 0 = 0\cdot x \Rightarrow y = 0$$

iii) Για $x > 0$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x\ln x + x^2\dfrac{1}{x} - x = 2x\ln x$ και $f'(0) = 0$ άρα

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\ln x & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$$

x	0		1		$+\infty$
f'	0	$-$	0	$+$	
f	0	↘		↗	$+\infty$
	TM $f(0) = 0$		OE $f(1) = -\frac{1}{2}$		

Στο $\Delta_1 = [0,1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα

$$f(\Delta_1) = [f(1), f(0)] = \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$$

Στο $\Delta_2 = [1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα

$$f(\Delta_2) = \left[f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) = +\infty$

οπότε

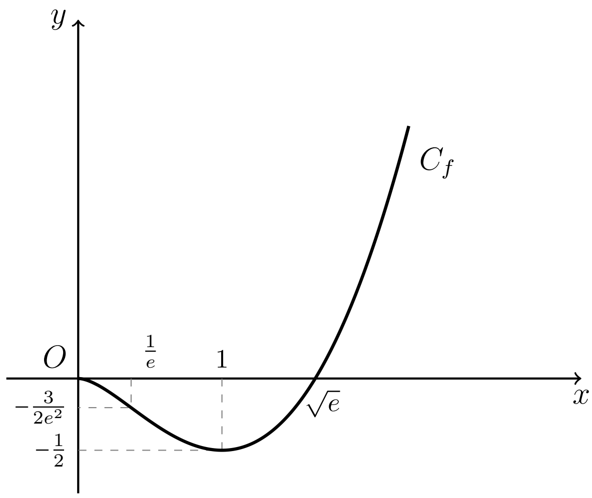
$$f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

iv) Για $x > 0$ είναι $f''(x) = (2x\ln x)' = 2\ln x + 2$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f					

ΣΚ
$\left(\frac{1}{e}, -\frac{3}{2e^2}\right)$



v) α′)

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0\ ,\ x = \sqrt{e}$
- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{e}$
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, \sqrt{e})$

Επομένως $\varphi(x) = |f(x)| = \begin{cases} -x^2 \ln x + \dfrac{1}{2}x^2 & , \ 0 \leq x < \sqrt{e} \\ x^2 \ln x - \dfrac{1}{2}x^2 & , \ x \geq \sqrt{e} \end{cases}$

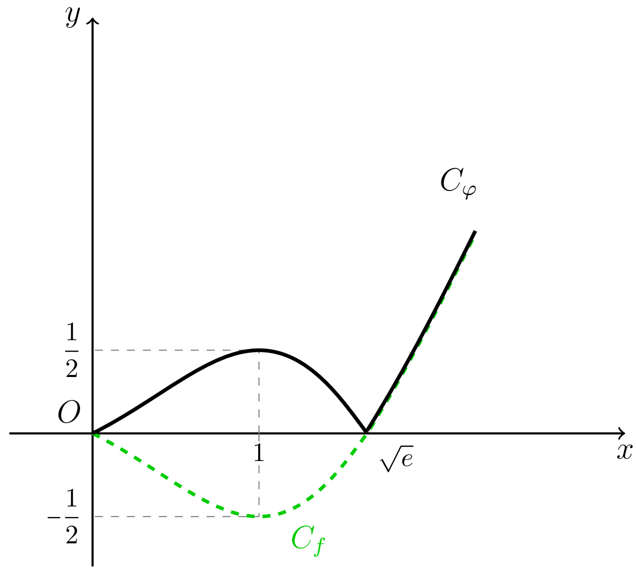
Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \sqrt{e})$ και στο $\sqrt{e}, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\lim_{x \to \sqrt{e}^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(\sqrt{e})}{x - \sqrt{e}} = \lim_{x \to \sqrt{e}^-} \frac{-f(x) - 0}{x - \sqrt{e}} = -f'(\sqrt{e}) = -\sqrt{e}$$

$$\lim_{x \to \sqrt{e}^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(\sqrt{e})}{x - \sqrt{e}} = \lim_{x \to \sqrt{e}^+} \frac{f(x) - 0}{x - \sqrt{e}} = f'(\sqrt{e}) = \sqrt{e}$$

άρα η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\sqrt{e}$, άρα ούτε σε όλο το $[0, +\infty)$

β΄) Η γραφική παράσταση της φ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ ή και πάνω σε αυτόν και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$, άρα



- Η φ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το 0 για $x = 0$ και $x = \sqrt{e}$
- Η φ παρουσιάζει για $x = 1$ τοπικό μέγιστο το $\varphi(1) = \dfrac{1}{2}$