Άσκηση 118

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με τύπο $f(x)=x^2+2-2\ln x$, $x>0$ και $g(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{\ln x}{x}$, $x>0$.

i) Να δείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

ii) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iii) α΄) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_g.

β΄) Να δείξετε ότι $g(x)<x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x=e^{-\frac{x^2}{2}}$ έχει ακριβώς μία ρίζα, έστω x_0, με $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.
Δίνεται $\ln 2>0,6$.

v) α΄) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε ημ$\theta=x_0$.

β΄) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{\theta}^{\frac{\pi}{6}} g(\text{ημ}x)dx+\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} g(\text{ημ}x)dx>0$

Λύση

i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2(x^2-1)}{x}$

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

OE
$f(1) = 3$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$ το $f(1) = 1^2 + 2 - 2\ln 1 = 3$. Επομένως, για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει

$$f(x) \geq f(1) = 3 > 0$$

ii) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$g'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2+2-2\ln x}{2x^2} = \frac{f(x)}{2x^2}$$

Επειδή $f(x) > 0$ και $2x^2 > 0$ για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) > 0$. Συνεπώς, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$g''(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3} + \frac{2\ln x}{x^3} - \frac{1}{x^3} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x = 3 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$$

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
g''		$-$	0	$+$	
g		$\frown$		$\smile$	

ΣΚ
$\left(e^{\frac{3}{2}}, \dfrac{e^3+3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$

iii) α′) Είναι

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\cdot\ln x\right) = 0 + (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{\ln x}{x^2}\right)=\frac{1}{2}=\lambda$$

διότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}0$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0=\beta$$

Άρα η $y=\frac{1}{2}x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$

β΄) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε διαδοχικά

$$g(x)<x\Leftrightarrow\frac{x}{2}+\frac{\ln x}{x}<x\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}<\frac{x}{2}\overset{x>0}{\Rightarrow}$$

$$2\ln x<x^2\Leftrightarrow x^2-2\ln x>0\Leftrightarrow f(x)>2$$

που ισχύει αφού για κάθε $x>0$ έχουμε $f(x)\geq 3>2$

Συνεπώς, ισχύει $g(x)<x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

iv) Για $x>0$ έχουμε

$$x=e^{-\frac{x^2}{2}}\Leftrightarrow\ln x=-\frac{x^2}{2}\Leftrightarrow\frac{x^2}{2}+\ln x=0\Leftrightarrow\frac{x}{2}+\frac{\ln x}{x}=0\Leftrightarrow g(x)=0$$

- Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ ως πράξεις συνεχών.
- $g(1)=\frac{1}{2}+\frac{\ln 1}{1}=\frac{1}{2}>0.$
- $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-2\ln 2<0$ αφού $\ln 2>0,6$

άρα $g\left(\frac{1}{2}\right)\cdot g(1)<0$ οπότε από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$ και g γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα το x_0 είναι μοναδικό

v) α΄) Θέτω $\phi(x)=\text{ημ}x-x_0,\ x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right].$

- Η ϕ είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ ως διαφορά συνεχών
- $\phi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\text{ημ}\left(\frac{\pi}{6}\right)-x_0=\frac{1}{2}-x_0<0$ αφού $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)\Rightarrow x_0>\frac{1}{2}$
- $\phi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}\right)-x_0=1-x_0>0$

άρα $\phi\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ οπότε από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\theta \in \left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ ώστε $\phi(\theta) = 0 \Leftrightarrow ημ\theta = x_0$

Επιπλέον, η ϕ είναι παραγωγίσιμη με $\phi'(x) = συνx > 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$, οπότε η ϕ είναι γνησίως αύξουσα άρα η ρίζα θ είναι μοναδική.

β′) Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\int\limits_{\theta}^{\frac{\pi}{6}} g(ημx)dx + \int\limits_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} g(ημx)dx > 0$

Είναι

$$\int\limits_{\theta}^{\frac{\pi}{6}} g(ημx)dx + \int\limits_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} g(ημx)dx = -\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\theta} g(ημx)dx + \int\limits_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} g(ημx)dx$$

Για $x \in \left[\frac{\pi}{6},\theta\right]$ έχουμε

$$x \le \theta \Rightarrow ημx \le ημ\theta \Rightarrow ημx \le x_0 \overset{g\ \text{γν. αυξ.}}{\Rightarrow} g(ημx) \le g(x_0) = 0$$

και το = για $x = \theta$, άρα

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\theta} g(ημx)dx < 0 \Rightarrow -\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\theta} g(ημx)dx > 0$$

Για $x \in \left[\theta,\frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε

$$x \ge \theta \Rightarrow ημx \ge ημ\theta \Rightarrow ημx \ge x_0 \overset{g\ \text{γν. αυξ}}{\Rightarrow} g(ημx) \ge g(x_0) = 0$$

και το = για $x = \theta$, άρα

$$\int\limits_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} g(ημx)dx > 0 \quad (2)$$

οπότε προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$$-\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\theta} g(ημx)dx + \int\limits_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} g(ημx)dx > 0 \Leftrightarrow \int\limits_{\theta}^{\frac{\pi}{6}} g(ημx)dx + \int\limits_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} g(ημx)dx > 0$$