

Άσκηση 119

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x \ln \left(1 - \frac{1}{x}\right)$ και $g(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

ii) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

iii) α') Να εξετάσετε αν οι C_f, C_g έχουν κατακόρυφη ασύμπτωτη.

β') Να δείξετε ότι οι οριζόντιες ασύμπτωτες των C_f, C_g έχουν απόσταση $d = \frac{1}{e} + 1$.

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_2^3 (g(x) + f(x)) dx > 9 \ln \frac{2}{3} + 3 \ln 2$.

Λύση

i) Η $f(x) = x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = x \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{x-1}$$

και f' παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με

$$f''(x) = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1) - x}{x(x-1)^2} = -\frac{1}{x(x-1)^2}$$

Είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$. Επομένως, η f είναι κοίλη στο $(1, +\infty)$

Αφού $f''(x) < 0$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$, οπότε

$$f'((1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)\right) = \left(0, \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)\right)$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x-1} \right] = \ln 1 + 0 = 0$$

άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$. Συνεπώς, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

ii) Η συνάρτηση $g(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = \left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x) = g(x) \cdot f'(x)$$

Είναι $g(x) > 0$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$. Επομένως, $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$

iii) α) Οι f, g είναι συνεχείς στο $(1, +\infty)$ με

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \right] = 1 \cdot (-\infty) = -\infty$$

άρα η $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

και

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{f(x)} \stackrel{u=f(x)}{=} \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$$

άρα η C_g δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη

β') Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \right) = -1$$

άρα η $y = -1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{f(x)} \stackrel{u=f(x)}{=} \lim_{u \rightarrow -1} e^u = \frac{1}{e}$$

άρα η $y = \frac{1}{e}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$

Η απόσταση d των δύο οριζόντιων ασυμπτώτων είναι

$$d = \left| \frac{1}{e} - (-1) \right| = \frac{1}{e} + 1$$

iv) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x+1$ και το $=$ μόνο για $x=0$. Θέτοντας όπου x το $f(x) < 0$ για κάθε $x > 1$ έχουμε

$$e^{f(x)} > f(x) + 1 \Leftrightarrow g(x) > f(x) + 1 \Leftrightarrow g(x) + f(x) > 2f(x) + 1$$

άρα

$$\int_2^3 (g(x) + f(x)) dx > \int_2^3 (2f(x) + 1) dx = \int_2^3 2f(x) dx + 1$$

Είναι

$$\begin{aligned} \int_2^3 2f(x) dx &= \int_2^3 2x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = \int_2^3 (x^2)' \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = \\ &= \left[x^2 \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \right]_2^3 - \int_2^3 x^2 \cdot \frac{1}{x(x-1)} dx = \\ &= 9 \ln \frac{2}{3} + 4 \ln 2 - \int_2^3 \frac{x}{x-1} dx = 9 \ln \frac{2}{3} + 4 \ln 2 - \int_2^3 \frac{(x-1)+1}{x-1} dx = \\ &= 9 \ln \frac{2}{3} + 4 \ln 2 - \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = 9 \ln \frac{2}{3} + 4 \ln 2 - \left[x + \ln(x-1) \right]_2^3 = \\ &= 9 \ln \frac{2}{3} + 4 \ln 2 - (3 + \ln 2 - 2 - \ln 1) = 9 \ln \frac{2}{3} + 4 \ln 2 - 1 - \ln 2 = \\ &= 9 \ln \frac{2}{3} + 3 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

Συνεπώς προκύπτει

$$\int_2^3 (g(x) + f(x)) dx > 9 \ln \frac{2}{3} + 3 \ln 2 - 1 + 1 = 9 \ln \frac{2}{3} + 3 \ln 2$$