

Άσκηση 12

Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(1) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-5(2x - 10)}{4(5 - \sqrt{5x})}$

- $f(ex) = \ln x + 2e^2x^2 + \alpha$ για κάθε $x > 0$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι $f(1) = 5$.

ii) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x + 2x^2 + 3$, $x > 0$.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και τα σημεία καμπής και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iv) Να αποδείξετε ότι $\left(-\ln 2 + \frac{7}{2}\right)\pi < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 3f(\eta\mu x)dx < 5\pi$.

v) Να δείξετε $x^2f(x) + f(x^4) \geq x^2f(x^2) + f(x^3)$ για κάθε $x \geq 1$.

vi) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\eta\mu(2x) - \sqrt{3}x}{f'(x) - 4}$.

Λύση

i)

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-10(x-5)}{4(5-\sqrt{5x})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-10(x-5)(5+\sqrt{5x})}{4(25-5x)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-10(x-5)(5+\sqrt{5x})}{-20(x-5)}$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5+\sqrt{5x}}{2} = \frac{5+5}{2} \Rightarrow f(1) = 5$$

ii) Για $x = \frac{1}{e} \Rightarrow f(1) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) + 2e^2\left(\frac{1}{e}\right)^2 + \alpha \Rightarrow 5 = -1 + 2 + \alpha \Rightarrow \alpha = 4$. Θέτουμε $ex = u$, $u > 0 \Rightarrow x = \frac{u}{e}$. Τότε

$$f(u) = \ln\left(\frac{u}{e}\right) + 2e^2\left(\frac{u}{e}\right)^2 + 4 = \ln u - \ln e + 2u^2 + 4 \Rightarrow f(x) = \ln x + 2x^2 + 3$$

iii) $f'(x) = \frac{1}{x} + 4x > 0$ για $x > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + 4 = \frac{4x^2 - 1}{x^2} \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f(A) = \mathbb{R}$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$			

$$\text{Σ.Κ.} \\ A\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2} - \ln 2\right)$$

iv) Για $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \eta\mu x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \xleftrightarrow{f \nearrow} f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(\eta\mu x) \leq f(1)$

$$\frac{7}{2} - \ln 2 \leq f(\eta\mu x) < 5 \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{7}{2} - \ln 2\right) dx < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x) dx < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 5 dx$$

$$\left(\frac{7}{2} - \ln 2\right) \frac{\pi}{3} < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x) dx < 5 \frac{\pi}{3} \Rightarrow \left(\frac{7}{2} - \ln 2\right) \pi < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 3f(\eta\mu x) < 5\pi$$

v) Για $x = 1$ η σχέση ισχύει ως ισότητα.

Για $x > 1$ έχουμε $f(x^4) - f(x^3) > x^2(f(x^2) - f(x))$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $[x, x^2]$ και $[x^3, x^4]$ (αφού $1 < x < x^2 < x^3 < x^4$).

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1 \in (x, x^2)$ και $\xi_2 \in (x^3, x^4)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x^2) - f(x)}{x^2 - x} \Rightarrow \frac{f(x^2) - f(x)}{x(x-1)}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x^4) - f(x^3)}{x^4 - x^3} \Rightarrow \frac{f(x^4) - f(x^3)}{x^3(x-1)}$$

Είναι $x \geq 1 > \frac{1}{2}$, άρα f' γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και

$$\begin{aligned} \xi_1 < \xi_2 &\Leftrightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(x^2) - f(x)}{x(x-1)} < \frac{f(x^4) - f(x^3)}{x^3(x-1)} \\ &\Leftrightarrow f(x^4) - f(x^3) > x^2(f(x^2) - f(x)) \end{aligned}$$

vi)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\eta\mu(2x) - \sqrt{3}x}{f'(x) - 4} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[(\eta\mu(2x) - \sqrt{3}x) \cdot \frac{1}{f'(x) - 4} \right] = \left(\eta\mu 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot (+\infty) = -\infty$$

διότι

$1 < \frac{\pi}{3}$ και η $\eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε $1 < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \eta\mu 1 < \eta\mu \frac{\pi}{3} \Rightarrow \eta\mu 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$

και η f' παρουσιάζει στο $x_0 = 1/2$ ολικό ελάχιστο το $f'(1/2) = 4$. Άρα για κάθε $x > 0$ ισχύει $f'(x) \geq 4 \Rightarrow f'(x) - 4 \geq 0$, με την ισότητα μόνο για $x = 1/2$.

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$		0	
$f'(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$

Ο.Ε.

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$