Άσκηση 120

Δίνεται η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A = \mathbb{R} - \{0\}$ με $f(x) = x - 1 - \ln|x|$.

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $|x| - e^{x-1} = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες, την $x_0 \in \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ και την $x_1 = 1$.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x \ , \ x \in \mathbb{R}$

iii) Να βρείτε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

Έστω $h(x) = e^x - x - 1 \ , \ x \in \mathbb{R}$

iv) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{x_0}^{0} h(x)dx = x_0(e+1) + 1 + \frac{x_0^2}{2}$.

v) Να βρείτε το όριο $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\ln(x\eta\mu x)}$.

Λύση

i) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{0\}$ με $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
f		↗	‖	↘		↗	

TE
$f(1) = 0$

και $f''(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \neq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$+$	‖	$+$	
f		∪	‖	∪	

Η f είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$

ii) Είναι

$$|x| - e^{x-1} = 0 \Leftrightarrow |x| = e^{x-1} \Leftrightarrow \ln|x| = x - 1 \Leftrightarrow x - 1 - \ln|x| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

- Στο διάστημα $\Delta_1 = (0, +\infty)$, η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(1) = 0$, άρα $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$ και το $=$ μόνο για $x = 1$, άρα η $x_1 = 1$ είναι μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

- Στο διάστημα $\Delta_2 = (-\infty, 0)$, η f είναι γνησίως αύξουσα.
  - $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2} - 1 - \ln\left|-\dfrac{1}{2}\right| = -\dfrac{3}{2} + \ln 2 < 0$
  - $f\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{1}{4} - 1 - \ln\left|-\dfrac{1}{4}\right| = -\dfrac{5}{4} + 2\ln 2 > 0$

  Η f είναι συνεχής στο $\left[-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right]$ και $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) \cdot f\left(-\dfrac{1}{4}\right) < 0$ άρα από Θεώρημα Bolzano η $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$ και επειδή f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$, η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Συνεπώς, η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_0 \in \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$ και $x_1 = 1$.

iii) Είναι

$$D_h = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid e^x \neq 0\} = \mathbb{R}$$

αφού $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$h(x) = f(g(x)) = e^x - 1 - \ln|e^x| = e^x - 1 - x = e^x - x - 1$$

iv) Το x_0 είναι ρίζα της $f(x) = 0$ στο $(-\infty, 0)$, άρα

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 - 1 - \ln(-x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \ln(-x_0) + 1 \quad (1)$$

Έχουμε

$$\int_{x_0}^{0} h(x)dx = \int_{x_0}^{0} (e^x - x - 1)dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2} - x\right]_{x_0}^{0} = 1 - e^{x_0} + \frac{x_0^2}{2} + x_0 \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\int_{x_0}^{0} h(x)dx = 1 - e^{\ln(-x_0)+1} + \frac{x_0^2}{2} + x_0 = 1 - e(-x_0) + \frac{x_0^2}{2} + x_0 = x_0(e+1) + \frac{x_0^2}{2} + 1$$

v) Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{\ln(x\eta\mu x)}$

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x - 1 - \ln|x|) = 0 - 1 - (-\infty) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0}(x\eta\mu x) = 0 \cdot 0 = 0$ και $x\eta\mu x > 0$ κοντά στο 0 άρα $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x\eta\mu x) = -\infty$

οπότε

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\ln(x\eta\mu x)} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{[\ln(x\eta\mu x)]'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x}{x\eta\mu x}} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-1)\frac{\eta\mu x}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x} + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{-1\cdot 1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$