Άσκηση 121

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| & , \ x \neq 0 \\ I + \kappa & , \ x = 0 \end{cases}$, όπου $I = \int_1^e 2x \ln|x| dx$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι $\kappa = -\dfrac{e^2+1}{2}$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

iii) Να αποδείξετε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-e^{-\frac{3}{2}}, e^{-\frac{3}{2}}\right]$.

iv) α′) Να βρείτε το πλήθος των ρίζων της εξίσωσης $f(x) = e^{\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

β′) Να αποδείξετε ότι $\rho_1 + \rho_2 = 0$, όπου ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης.

Λύση

i) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, δηλαδή ισχύει

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(x^2 \ln|x|\right) = I + \kappa$$

Είναι

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 \ln|x|\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x^2}} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

Συνεπώς, έχουμε $I + \kappa = 0 \Rightarrow \kappa = -I$

και

$$I = \int_1^e 2x\ln|x|\,dx = \int_1^e \left(x^2\right)'\ln x\,dx = \left[x^2\ln x\right]_1^e - \int_1^e x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$e^2 - \int_1^e x\,dx = e^2 - \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2+1}{2}$$

Άρα

$$\kappa = -I = -\frac{e^2+1}{2}$$

ii) Για $x \neq 0$, η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \left(x^2\ln|x|\right)' = 2x\ln|x| + x^2\cdot\frac{1}{x} = x(2\ln|x| + 1)$$

και

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\ln|x| - (I+\kappa)}{x} \overset{I+\kappa=0}{=} \lim_{x\to 0}(x\ln|x|) =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 0$, οπότε είναι

$$f'(x) = \begin{cases} x(2\ln|x|+1) & ,\ x \neq 0 \\ 0 & ,\ x = 0 \end{cases}$$

Για $x \neq 0$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(2\ln|x|+1) = 0 \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} 2\ln|x| + 1 = 0 \Rightarrow \ln|x| = -\frac{1}{2} \Rightarrow |x| = e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{e}}$$

- Για $x > 0$ είναι

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 2\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

- Για $x < 0$ είναι

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 2\ln(-x) + 1 < 0 \Leftrightarrow \ln(-x) < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -x < e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x > -e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{e}}$$

x	$-\infty$	$-e^{-\frac{1}{2}}$		0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$ $\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Τ.Ε. $f\left(-e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2e}$ Τ.Μ. $f(0) = 0$ Τ.Ε. $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2e}$

Για $x \neq 0$ η f' είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = (2\ln|x| + 1) + x \cdot \frac{2}{x} = 2\ln|x| + 3$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 2\ln|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow \ln|x| = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}} \quad ή \quad x = -e^{-\frac{3}{2}}$$

x	$-\infty$	$-e^{-\frac{3}{2}}$		0		$e^{-\frac{3}{2}}$		$+\infty$
f''	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f	$\cup$		$\cap$		$\cap$		$\cup$	

Σ.Κ. $\left(-e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$ Σ.Κ. $\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$

iii)
- Για κάθε $x \neq 0$ η $f'(x) = x(2\ln|x| + 1)$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών
- Για $x = 0$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}[x(2\ln|x| + 1)] = \lim_{x\to 0}(2x\ln|x| + x) = 2 \cdot 0 + 0 = 0 = f'(0)$$

Επομένως, η f' είναι συνεχής στο 0, άρα και σε όλο $\left[-e^{-\frac{3}{2}}, e^{-\frac{3}{2}}\right]$. Είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(-e^{-\frac{3}{2}}, 0\right) \cup \left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right)$ και f' είναι συνεχής στο $\left[-e^{-\frac{3}{2}}, e^{-\frac{3}{2}}\right]$ άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-e^{-\frac{3}{2}}, e^{-\frac{3}{2}}\right]$

iv) α′) Στο $\Delta_1 = \left(-\infty, -e^{-\frac{1}{2}}\right]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής, άρα

$$f(\Delta_1) = \left[f\left(-e^{-\frac{1}{2}}\right), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$$

Το $e^\lambda \in f(\Delta_1)$ και f γνησίως αύξουσα, άρα η εξίσωση $f(x) = e^\lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα $\rho_1 \in \left(-\infty, -e^{-\frac{1}{2}}\right)$

Στο $\Delta_2 = \left[-e^{-\frac{1}{2}}, 0\right]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, άρα

$$f(\Delta_2) = \left[f\left(-e^{-\frac{1}{2}}\right), f(0)\right] = \left[-\frac{1}{2e}, 0\right]$$

Το $e^\lambda \notin f(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο Δ_2

Στο $\Delta_3 = \left[0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής, άρα

$$f(\Delta_3) = \left[f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right), f(0)\right] = \left[-\frac{1}{2e}, 0\right]$$

Το $e^\lambda \notin f(\Delta_3)$ οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο Δ_3

Στο $\Delta_4 = \left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$ η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, άρα

$$f(\Delta_4) = \left[f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$$

Το $e^\lambda \in f(\Delta_4)$ και f γνησίως αύξουσα, η εξίσωση $f(x) = e^\lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα $\rho_2 \in \left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$

Συνεπώς, η εξίσωση $f(x) = e^\lambda$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες στο $\mathbb{R}$

β΄) Είναι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$ και για $x \neq 0$ ισχύει

$f(-x) = (-x)^2 \ln|-x| = x^2 \ln|x| = f(x)$ και $f(-0) = f(0) = 0$ άρα η f είναι άρτια στο $\mathbb{R}$

Αν ρ_2 είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = e^\lambda$, τότε

$$f(\rho_2) = e^\lambda \Rightarrow f(-\rho_2) = e^\lambda$$

δηλαδή το $-\rho_2$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης. Επειδή όμως δείξαμε στο ότι η εξίσωση έχει μοναδική αρνητική ρίζα τη ρ_1, αναγκαστικά ισχύει

$$\rho_1 = -\rho_2 \Rightarrow \rho_1 + \rho_2 = 0$$