Άσκηση 122

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} x^2 ημ\dfrac{1}{x} & , x \neq 0 \\ \ln\alpha & , x = 0 \end{cases}$, όπου $\alpha \neq 0$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ και $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + f(x) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

i) Να βρείτε το α αν η f είναι συνεχής.

ii) Να δείξετε ότι η C_f εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στην αρχή των αξόνων.

iii) Αν m παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, να δείξετε ότι η $\sigma = m \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

iv) α΄) Να βρείτε τη συνάρτηση $K = f \circ g$.

β΄) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $K(x) = \dfrac{1}{x^2}ημx$, $x \neq 0$.

v) α΄) Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_h στην αρχή των αξόνων.

β΄) Να αποδείξετε ότι η (ε) τέμνει την C_h σε άπειρα σημεία.

vi) Να αποδείξετε ότι η $3x - 2y = 0$ είναι ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Λύση

i) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 ημ\dfrac{1}{x}\right) = \ln\alpha$

Είναι

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 ημ\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(x\cdot x ημ\frac{1}{x}\right) = 0\cdot 0 = 0$$

οπότε

$$\ln\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

ii) Για $\alpha = 1$ είναι $f(0) = \ln 1 = 0$ και

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 ημ\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(x ημ\frac{1}{x}\right) = 0$$

Η εφαπτομένης της C_f στο $(0, f(0))$ έχει εξίσωση

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y - 0 = 0\cdot x \Rightarrow y = 0$$

άρα η C_f εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στην αρχή των αξόνων

iii) Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και η m παραγωγίσιμη στο $f(0) = 0$, άρα και η $\sigma = m\circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $\sigma'(0) = m'(f(0))\cdot f'(0) = m'(0)\cdot 0 = 0$

iv) α′) Είναι

$$D_K = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq 0 \mid \frac{1}{x} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^*$$

Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει

$$K(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 ημ\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x^2}ημx$$

άρα $K(x) = \dfrac{1}{x^2}ημx \ , \ x \neq 0$

β′) Η K είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ και

- $$\lim_{x\to 0^+} K(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{ημx}{x}\right) = +\infty\cdot 1 = +\infty$$

  άρα η $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_K

- $$\left|\frac{ημx}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \le \frac{ημx}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

  με $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^2} = 0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής

  $$\lim_{x\to\pm\infty} K(x) = 0$$

  άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_K στο $+\infty$ και στο $-\infty$

v) α′) Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x+f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\frac{f(x)}{x}\right)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στο $(0,0)$ είναι

$$y-0=h'(0)(x-0)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x$$

β′) Οι τετμημένες των σημείων τομής της (ε) με την C_h προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης $h(x)=\frac{1}{2}x$

- Για $x=0$ ισχύει $h(0)=\frac{1}{2}\cdot 0=0$ οπότε η αρχή των αξόνων $(0,0)$ είναι κοινό σημείο
- Για $x\neq 0$ η εξίσωση γίνεται

$$\frac{1}{2}x+f(x)=\frac{1}{2}x\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x^2\text{ημ}\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow \text{ημ}\frac{1}{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}=k\pi\Leftrightarrow x=\frac{1}{k\pi}\,,\ k\in\mathbb{Z}^*$$

άρα η (ε) τέμνει την C_h σε άπειρα σημεία.

vi) Η $3x-2y=0\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x$ είναι ασύμπτωτη της C_h στο $\pm\infty$ αν $\lim_{x\to\pm\infty}\left(h(x)-\frac{3}{2}x\right)=0$
Είναι

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(h(x)-\frac{3}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2\text{ημ}\frac{1}{x}-x\right)\overset{u=\frac{1}{x}}{=}\lim_{u\to 0}\left(\frac{\text{ημ}u}{u^2}-\frac{1}{u}\right)=$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{\text{ημ}u-u}{u^2}\overset{DLH}{=}\lim_{u\to 0}\frac{\text{συν}u-1}{2u}=\frac{1}{2}\cdot 0=0$$

Συνεπώς η ευθεία $3x-2y=0$ είναι ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$ και στο $-\infty$