Άσκηση 123

Έστω η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ για την οποία ισχύουν:

- $\dfrac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{1-x^2}}\ ,\ x \in A - \{0\}$
- $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{4-x} - x - 2}{\text{ημ}5x} + \dfrac{x+1}{4} \right)$

i) Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.

ii) Να βρείτε τη συνάρτηση f.

iii) α΄) Να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)\ ,\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

β΄) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το $f(A)$.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} f(x) & ,\ x \in A \\ 0 & ,\ x = 1 \end{cases}$

iv) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $h'(\xi) = \dfrac{h(\xi)}{2 - \xi}$.

v) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-\kappa}^{\kappa} h(x)dx$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$ με $|\kappa| < 1$.

Λύση

i) Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-(x+2)}{ημ5x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4-x}-(x+2))(\sqrt{4-x}+(x+2))}{ημ5x\cdot(\sqrt{4-x}+x+2)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(4-x)-(x+2)^2}{ημ5x\cdot(\sqrt{4-x}+x+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{4-x-(x^2+4x+4)}{ημ5x\cdot(\sqrt{4-x}+x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2-5x}{ημ5x\cdot(\sqrt{4-x}+x+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x(x+5)}{ημ5x\cdot(\sqrt{4-x}+x+2)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{5x}{ημ5x}\cdot\frac{-x-5}{5(\sqrt{4-x}+x+2)}\right]=1\cdot\frac{-0-5}{5(\sqrt{4-0}+0+2)}=\frac{-5}{5\cdot 4}=-\frac{1}{4}$$

άρα

$$f(0)=-\frac{1}{4}+\frac{0+1}{4}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0$$

ii) Για κάθε $x\in A-\{0\}$ έχουμε

$$\frac{f(x)}{x}=e^{\frac{1}{1-x^2}}\Rightarrow f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{1-x^2}}$$

Παρατηρούμε ότι ο τύπος $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{1-x^2}}$ επαληθεύεται και για $x=0$, αφού $0\cdot e^1=0$. Συνεπώς, $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{1-x^2}}$ για κάθε $x\in A$

iii) α΄) Είναι

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}\left(x\cdot e^{\frac{1}{1-x^2}}\right)=-1\cdot 0=0$$

αφού $\lim\limits_{x\to -1^-}e^{\frac{1}{1-x^2}}\overset{u=\frac{1}{1-x^2}}{=}\lim\limits_{u\to -\infty}e^u=0$ και

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(x\cdot e^{\frac{1}{1-x^2}}\right)=1\cdot 0=0$$

αφού $\lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{1-x^2}}\overset{u=\frac{1}{1-x^2}}{=}\lim\limits_{u\to -\infty}e^u=0$

β΄) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο A ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=e^{\frac{1}{1-x^2}}+x\cdot e^{\frac{1}{1-x^2}}\cdot\frac{2x}{(1-x^2)^2}=e^{\frac{1}{1-x^2}}\left[1+\frac{2x^2}{(1-x^2)^2}\right]=e^{\frac{1}{1-x^2}}\cdot\frac{x^4+1}{(1-x^2)^2}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	
$f(x)$	↗	↗	↗	

Είναι

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-x^2}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=(-\infty)\cdot e^0=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1-x^2}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=(+\infty)\cdot e^0=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1}{1-x^2}=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=(-1)\cdot(+\infty)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{1-x^2}=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1\cdot(+\infty)=+\infty$

Λόγω της μονοτονίας και της συνέχειας της f στα επιμέρους διαστήματα έχουμε:

- $f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)\right)=(-\infty,0)$
- $f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to-1^+}f(x),\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$
- $f(A_3)=\left(\lim\limits_{x\to1^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$

άρα $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)=(-\infty,+\infty)$

iv) Η ζητούμενη σχέση γράφεται

$$h'(\xi)=\frac{h(\xi)}{2-\xi}\Leftrightarrow(2-\xi)h'(\xi)-h(\xi)=0\Leftrightarrow(2-\xi)h'(\xi)+(2-\xi)'h(\xi)=0$$

Θέτω $g(x)=(2-x)h(x)\ ,\ x\in[1,2]$

- Η h είναι συνεχής στο $(1,2]$ ως πράξεις συνεχών και

  $$\lim_{x\to1^+}h(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=0=h(1)$$

  άρα η h είναι συνεχής στο [1,2]. Συνεπώς, η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=(2-x)h'(x)-h(x)$
- $g(1)=(2-1)h(1)=1\cdot0=0$ και $g(2)=(2-2)h(2)=0$

άρα από Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi)=0\Rightarrow(2-\xi)h'(\xi)-h(\xi)=0\Rightarrow h'(\xi)=\frac{h(\xi)}{2-\xi}$$

v) Είναι $|\kappa|<1$ άρα $[-\kappa,\kappa]\subseteq(-1,1)$. Για κάθε $x\in(-1,1)$ ισχύει $h(x)=f(x)$ με $h(0)=0$ και

$$h(-x)=f(-x)=(-x)\cdot e^{\frac{1}{1-(-x)^2}}=-x\cdot e^{\frac{1}{1-x^2}}=-f(x)=-h(x)$$

άρα η h είναι περιττή στο $(-1,1)$, οπότε

$$\int_{-\kappa}^{\kappa} h(x)\,dx = \int_{-\kappa}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\kappa} f(x)\,dx$$

Είναι

$$\int_{-\kappa}^{0} f(x)\,dx \overset{u=-x}{=} \int_{\kappa}^{0} u\cdot e^{\frac{1}{1-u^2}}\,du = -\int_{0}^{\kappa} u\cdot e^{\dfrac{1}{1-u^2}}\,du = -\int_{0}^{\kappa} f(x)\,dz$$

Συνεπώς

$$\int_{-\kappa}^{\kappa} h(x)\,dx = -\int_{0}^{\kappa} f(x)\,dx + \int_{0}^{\kappa} f(x)\,dx = 0$$