Άσκηση 124

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f'(x+\kappa h) - f'(x-\lambda h)}{(\kappa+\lambda)h} = e^x(x^2-4x+3) + 2e^x(2x-4) + 2e^x$.

i) Να δείξετε ότι $f''(x) = e^x(x^2-4x+3) + 2e^x(2x-4) + 2e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Αν $f'(0)+1 = \int\limits_{-1}^{1} (2x - \eta\mu x)dx$, να δείξετε ότι $f'(x) = e^x(x^2-4x+3)+e^x(2x-4)$, $x \in \mathbb{R}$.

iii) Επιπλέον, αν $f(1) = \displaystyle\int_1^e \left(\ln x + \frac{1}{1-e}\right)dx$, να δείξετε ότι $f(x) = e^x(x^2-4x+3)$, $x \in \mathbb{R}$.

iv) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

v) Να βρείτε τα όρια:

α′) $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x)\eta\mu x)$.

β′) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^{\frac{1}{f(x)}} + \eta\mu x\right)$.

Λύση

i) Είναι

$$l=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+\kappa h)-f'(x-\lambda h)}{(\kappa+\lambda)h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+\kappa h)-f'(x)+f'(x)-f'(x-\lambda h)}{(\kappa+\lambda)h}=$$

$$\frac{1}{\kappa+\lambda}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x+\kappa h)-f'(x)}{h}-\frac{f'(x-\lambda h)-f'(x)}{h}\right]$$

Για το πρώτο όριο, θέτουμε $u=\kappa h$. Όταν $h\to 0$, προκύπτει $u\to 0$. Επομένως:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+\kappa h)-f'(x)}{h}=\lim_{u\to 0}\frac{f'(x+u)-f'(x)}{\frac{u}{\kappa}}=\kappa\cdot\lim_{u\to 0}\frac{f'(x+u)-f'(x)}{u}=\kappa f''(x)$$

Για το δεύτερο όριο, θέτουμε $v=-\lambda h$. Όταν $h\to 0$, προκύπτει $v\to 0$. Επομένως:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x-\lambda h)-f'(x)}{h}=\lim_{v\to 0}\frac{f'(x+v)-f'(x)}{-\frac{v}{\lambda}}=-\lambda\cdot\lim_{v\to 0}\frac{f'(x+v)-f'(x)}{v}=-\lambda f''(x)$$

άρα

$$l=\frac{1}{\kappa+\lambda}\left[\kappa f''(x)+\lambda f''(x)\right]=\frac{\kappa+\lambda}{\kappa+\lambda}f''(x)=f''(x)$$

οπότε

$$f''(x)=e^x(x^2-4x+3)+2e^x(2x-4)+2e^x\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

ii) Είναι για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$f''(x)=e^x(x^2-4x+3)+2e^x(2x-4)+2e^x=$$

$$\left[e^x(x^2-4x+3)+e^x(2x-4)\right]+\left[e^x(2x-4)+2e^x\right]$$

$$f''(x)=\left(e^x(x^2-4x+3)\right)'+\left(e^x(2x-4)\right)'$$

$$f''(x)=\left(e^x(x^2-4x+3)+e^x(2x-4)\right)'$$

άρα από συνέπειες ΘΜΤ έχουμε

$$f'(x)=e^x(x^2-4x+3)+e^x(2x-4)+c$$

Όμως

$$\int_{-1}^{1}(2x-\text{ημ}x)dx=\left[x^2+\text{συν}x\right]_{-1}^{1}=1+\text{συν}1-1-\text{συν}(-1)=\text{συν}1-\text{συν}1=0$$

άρα

$$f'(0)+1=0\Leftrightarrow f'(0)=-1$$

οπότε για $x=0$ προκύπτει $f'(0)=3+-4+c\Leftrightarrow -1=3-4+c\Leftrightarrow c=0$

Συνεπώς, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=e^x(x^2-4x+3)+e^x(2x-4)$

iii) Είναι για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = e^x(x^2 - 4x + 3) + e^x(2x - 4) = \left(e^x(x^2 - 4x + 3)\right)'$$

άρα από συνέπειες ΘΜΤ έχουμε

$$f(x) = e^x(x^2 - 4x + 3) + c$$

Όμως

$$f(1) = \int_1^e \left(\ln x + \frac{1}{1-e}\right) dx = \int_1^e (x)' \ln x\, dx + \left[\frac{x}{1-e}\right]_1^e = \left[x \ln x - x\right]_1^e + \frac{1}{1-e}(e-1) = 0$$

άρα για $x = 1$ προκύπτει $f(1) = 0 + c \Leftrightarrow c = 0$

Συνεπώς, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) = e^x(x^2 - 4x + 3)$

iv) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = e^x(x^2 - 4x + 3) + e^x(2x - 4) = e^x(x^2 - 2x - 1)$$

και

$$f''(x) = e^x(x^2 - 2x - 1) + e^x(2x - 2) = e^x(x^2 - 3)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2} \ \text{ ή } \ x = 1 + \sqrt{2}$$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

	ΤΜ	ΤΕ
	$2(1+\sqrt{2})e^{1-\sqrt{2}}$	$2(1-\sqrt{2})e^{1+\sqrt{2}}$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \ \text{ ή } \ x = \sqrt{3}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\smile$		$\frown$		$\smile$	

	ΣΚ	ΣΚ
	$(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3}))$	$(\sqrt{3}, f(\sqrt{3}))$

Τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f είναι τα

$$A\left(-\sqrt{3}, 2(3+2\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}}\right) \quad \text{και} \quad B\left(\sqrt{3}, 2(3-2\sqrt{3})e^{\sqrt{3}}\right)$$

v) α′) Είναι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4x+3}{e^{-x}} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-4}{-e^{-x}} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

και

$$|f(x)\text{ημ}x| = |f(x)|\cdot|\text{ημ}x| \le |f(x)|$$

$$-|f(x)| \le f(x)\text{ημ}x \le |f(x)|$$

με $\lim_{x\to-\infty}(-|f(x)|) = \lim_{x\to-\infty}|f(x)| = 0$ άρα από Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)\text{ημ}x) = 0$$

β′) Είναι $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο $-\infty$ οπότε $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)} = +\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{f(x)}} \overset{u=\frac{1}{f(x)}}{=} \lim_{u\to+\infty} e^u = +\infty$

Έχουμε

$$-1 \le \text{ημ}x \le 1 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{f(x)}} - 1 \le e^{\frac{1}{f(x)}} + \text{ημ}x \le e^{\frac{1}{f(x)}} + 1$$

με $\lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{f(x)}} - 1\right) = (+\infty) - 1 = +\infty$ άρα $\lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{f(x)}} + \text{ημ}x\right) = +\infty$