Άσκηση 125

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - x^2 - 2\ln(2x)\ ,\ x > 0$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

ii) α΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2x)^2 e^{-x^4} = e^{-x^2}$ έχει δύο ακριβώς ρίζες x_1 και x_2 με $0 < x_1 < \dfrac{1}{2}$ και $1 < x_2 < 2$.

β΄) Να λύσετε την ανίσωση $(2x)^2 < e^{x^4 - x^2}$.

iii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = \dfrac{1}{2}\ ,\ x = \dfrac{e}{2}$, όπου $g(x) = x^4 - x^2\ ,\ x \in \mathbb{R}$.

iv) Να βρείτε το όριο $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x + x_1) - f\left(\dfrac{x_2}{2} - e^x + x + 1\right)}{f(e^x) + \ln 4}$.

v) Να αποδείξετε ότι $2f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) > f'(x_2)(x_1 - x_2)$.

Λύση

i) Έχουμε $f(x) = x^4 - x^2 - 2\ln(2x)$ με $x \in (0,+\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x) = 4x^3 - 2x - \frac{2}{x} = \frac{4x^4 - 2x^2 - 2}{x} = \frac{2(2x^2+1)(x^2-1)}{x}$$

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

OE
$f(1) = -2\ln 2$

Η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x) = 12x^2 - 2 + \dfrac{2}{x^2}$. Είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$

ii) α′) Έχουμε

$$(2x)^2 e^{-x^4} = e^{-x^2} \Leftrightarrow \ln(2x)^2 - x^4 = -x^2 \overset{x>0}{\Rightarrow} 2\ln(2x) = x^4 - x^2 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Στο $\Delta_1 = (0,1]$, η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα με

$$f(\Delta_1) = [f(1), \lim_{x\to 0^+} f(x)) = [-2\ln 2, +\infty)$$

Επειδή $0 \in f(\Delta_1)$ η f έχει μοναδική ρίζα $x_1 \in (0,1)$

Είναι $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{16} < 0 \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right) < f(x_1) \underset{(0,1]}{\overset{f \text{ γν. φθιν.}}{\Leftrightarrow}} \dfrac{1}{2} > x_1$.

Στο $\Delta_2 = [1,+\infty)$, η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα με

$$f(\Delta_2) = [f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = [-2\ln 2, +\infty)$$

Επειδή $0 \in f(\Delta_2)$ η f έχει μοναδική ρίζα $x_2 \in (1,+\infty)$

Είναι $f(2) = 4(3 - \ln 2) > 0 \Rightarrow f(2) > f(x_2) \underset{[1,+\infty)}{\overset{f \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow}} 2 > x_2$.

Συνεπώς $x_1 \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ και $x_2 \in (1,2)$

β′) Είναι

$$(2x)^2 < e^{x^4 - x^2} \Leftrightarrow 2\ln(2x) < x^4 - x^2 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

Στο $(0,1)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα για $0 < x < x_1 \Leftrightarrow f(x) > f(x_1) = 0$

Στο $[1,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα για $x > x_2 \Leftrightarrow f(x) > f(x_2) = 0$

Συνεπώς, $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0,x_1) \cup (x_2,+\infty)$

iii) Είναι $E(\Omega) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} |-2\ln(2x)|\, dx$

Για $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{e}{2}\right] \Rightarrow 2x \in [1,e] \Rightarrow \ln(2x) \geq 0$, άρα

$$E(\Omega) = 2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \ln(2x)\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} (2x)'\ln(2x)\, dx = \Big[2x\ln(2x)\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} 2x \cdot \frac{2}{2x}\, dx =$$

$$\Big[2x\ln(2x) - 2x\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} = (e\ln e - e) - (1\ln 1 - 1) = 1$$

iv) Είναι

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x+x_1) - f\left(\frac{x_2}{2} - e^x + x + 1\right)}{f(e^x) + \ln 4} =$$

$$\lim_{x\to 0} \left[f(x+x_1) - f\left(\frac{x_2}{2} - e^x + x + 1\right)\right] \frac{1}{f(e^x) + \ln 4} = +\infty$$

διότι

$$\lim_{x\to 0} \left[f(x+x_1) - f\left(\frac{x_2}{2} - e^x + x + 1\right)\right] = f(x_1) - f\left(\frac{x_2}{2}\right) = -f\left(\frac{x_2}{2}\right) > 0$$

αφού $1 < x_2 < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{x_2}{2} < 1$ και $0 < x_1 < \frac{1}{2}$, άρα

$$0 < x_1 < \frac{1}{2} < \frac{x_2}{2} < 1 \Rightarrow x_1 < \frac{x_2}{2} \underset{(0,1]}{\overset{f \text{ γν. φθιν.}}{\Leftrightarrow}} f(x_1) > f\left(\frac{x_2}{2}\right) \Leftrightarrow 0 < -f\left(\frac{x_2}{2}\right)$$

και

η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$, άρα $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x > 0$ και το $=$ για $x = 1$, άρα $f(e^x) \geq -2\ln 2 \Leftrightarrow f(e^x) + ln4 \geq 0$ και το $=$ μόνο για $x = 0$

v) Η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, άρα η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο x_2 είναι

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Rightarrow y = f'(x_2)(x - x_2)$$

άρα $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$ για κάθε $x > 0$ και το $=$ για $x = x_2$

Άρα για $x = \frac{x_1 + x_2}{2} \neq x_2$ έχουμε $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > f'(x_2)\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_2\right) \Rightarrow$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > f'(x_2)\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) \Leftrightarrow 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > f'(x_2)(x_1 - x_2)$$