Άσκηση 126

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $(x^2 - 1)f(x) = x \ln x$ για κάθε $x > 0$
- $f(0) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(ημ2x - \frac{2}{\pi}\right) dx$

i) Να βρεθεί το $f(0)$.

ii) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

Έστω $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \ln x}{x^2 - 1} & , \ 0 < x \neq 1 \\ 0 & , \ x = 0 \\ \dfrac{1}{2} & , \ x = 1 \end{cases}$

iii) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, e)$ τέτοιο, ώστε $(e^2 - 1)f'(\xi) = 1$.

iv) Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $I = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x \ln x} dx$.

Λύση

i) Είναι

$$f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\text{ημ}2x - \frac{2}{\pi}\right) dx = \left[-\frac{\text{συν}2x}{2} - \frac{2}{\pi}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{1}{2} - 1\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

ii) Για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ έχουμε

$$(x^2-1)f(x) = x\ln x \Leftrightarrow f(x) = \frac{x\ln x}{x^2-1}$$

Η f είναι συνεχής στο $x=0$, οπότε

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x}{x^2-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

αφού

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

Η f είναι συνεχής στο $x=1$, οπότε

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x\ln x}{x^2-1} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + 1}{2x} = \frac{1}{2}$$

Συνεπώς, ο τύπος της συνάρτησης είναι

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{x^2-1} & , \ 0 < x \neq 1 \\ 0 & , \ x = 0 \\ \dfrac{1}{2} & , \ x = 1 \end{cases}$$

iii) Η f είναι

- συνεχής στο $[0,e]$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(0,1)\cup(1,e)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων και

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x\ln x}{x^2-1} - \frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x\ln x - x^2 + 1}{2(x-1)(x^2-1)} \overset{DLH}{=}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2\ln x + 2 - 2x}{6x^2 - 4x - 2} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{x} - 2}{12x - 4} = \frac{0}{8} = 0$$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$ με $f'(1) = 0$. Συνεπώς, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,e)$.

άρα από το ΘΜΤ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,e)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(e)-f(0)}{e-0} = \frac{\frac{e}{e^2-1}-0}{e} = \frac{1}{e^2-1} \Leftrightarrow (e^2-1)f'(\xi) = 1$$

iv) Είναι

$$I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x\ln x}dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\Big[\ln|x-1|-\ln|x+1|\Big]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}-\ln\frac{3}{4}+\ln\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{9}$$

διότι

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} \Rightarrow$$

$$1 = A(x+1)+B(x-1) \Rightarrow 1 = (A+B)x+(A-B)$$

άρα

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A=1 \\ A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Συνεπώς

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$