

Άσκηση 127

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής για την οποία ισχύει $(1 + |x|)f(x) < |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και F παράγουσα της f . Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{|x|}{1 + |x|}$ και

$$\text{η συνάρτηση } G(x) = \begin{cases} x + \ln(1 - x) & , x < 0 \\ x - \ln(1 + x) & , x \geq 0 \end{cases}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η G είναι παράγουσα της g .

ii) α') Να δείξετε ότι η συνάρτηση $H = F - G$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

β') Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (G(x) - x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (G(x) - x) = -\infty$.

iii) α') Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in \mathbb{R}$ ώστε $G(\xi) = \xi$.

β') Να δείξετε ότι $G(x) \geq x$ για κάθε $x \in (-\infty, \xi]$ και $G(x) \leq x$ για κάθε $x \in [\xi, +\infty)$.

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 (H(x) - x) dx > H(1) - \frac{1}{2}$.

Λύση

$$\text{i) Είναι } G(x) = \begin{cases} x + \ln(1-x) & , x < 0 \\ x - \ln(1+x) & , x \geq 0 \end{cases}$$

Για $x < 0$ η G είναι παραγωγίσιμη με

$$G'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{1-x-1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} = \frac{|x|}{1+|x|} = g(x)$$

Για $x > 0$ η G είναι παραγωγίσιμη με

$$G'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x} = \frac{|x|}{1+|x|} = g(x)$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + \ln(1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{\ln(1-x)}{x} \right) = 1 - 1 = 0$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-x)}{x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{1-x} = -1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right) = 1 - 1 = 0$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x} = 1$$

Άρα η G είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $G'(0) = 0 = g(0)$. Συνεπώς, $G'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η G είναι παράγουσα της g

ii) α') Η $H = F - G$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x)$

$$\text{Όμως για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ισχύει } (1+|x|)f(x) < |x| \Leftrightarrow f(x) < \frac{|x|}{1+|x|} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

Επομένως, $H'(x) = f(x) - g(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η H είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R}

β') Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (G(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-x) \stackrel{u=1-x}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (G(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln(1+x)) \stackrel{u=1+x}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} (-\ln u) = -\infty$$

iii) α') Θέτω $\Phi(x) = G(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$

Η Φ είναι παραγωγίσιμη με $\Phi'(x) = G'(x) - 1 = g(x) - 1 = \frac{|x|}{1+|x|} - 1 = -\frac{1}{1+|x|} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η Φ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

Η Φ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα με

$$\Phi(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Το $0 \in \Phi(\mathbb{R})$ άρα υπάρχει μοναδικό $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $\Phi(\xi) = 0 \Leftrightarrow G(\xi) = \xi$

$$\beta') \text{ Για } x \leq \xi \stackrel{\Phi \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} \Phi(x) \geq \Phi(\xi) \iff G(x) - x \geq 0 \Leftrightarrow G(x) \geq x$$

$$\text{Για } x \geq \xi \stackrel{\Phi \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} \Phi(x) \leq \Phi(\xi) \Leftrightarrow G(x) - x \leq 0 \Leftrightarrow G(x) \leq x$$

iv) Η H είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , άρα για

$$x \leq 1 \Leftrightarrow H(x) \geq H(1) \Leftrightarrow H(x) - x \geq H(1) - x$$

και το = μόνο για $x = 1$, οπότε

$$\int_0^1 (H(x) - x) dx > \int_0^1 (H(1) - x) dx = \left[H(1)x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = H(1) - \frac{1}{2}$$