

Άσκηση 13

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2(2\ln x - 1) & , x > 0 \\ \alpha & , x = 0 \end{cases}$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha = 0$.

ii) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία της.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Δίνεται επιπλέον συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει

$$2 + f(g(1) - 2) + f(g'(1) - 1) \leq 0.$$

iv) Να δείξετε ότι $g(1) = 3$ και $g'(1) = 2$.

v) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

$$\alpha') \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 3}{\eta\mu(x^2 - 1)}.$$

$$\beta') \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 3}{f(x) + 1}.$$

$$\gamma') \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{\eta\mu(\pi x) - 1}.$$

vi) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\int_0^1 (-1 - f(x)) dx}{x - 1} - \frac{f(\gamma) + 1}{x + 1} = 0$, $0 < \gamma \neq 1$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(-1, 1)$.

Λύση

i) Η f είναι συνεχής στο 0 άρα

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2(2 \ln x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x - 1}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{DHL}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2) = 0$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x \ln x - x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x}{\frac{1}{x}} - 0 \stackrel{DHL}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2x) = 0$$

Άρα $f'(0) = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} 4x \ln x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (απορρίπτεται γιατί δεν είναι εσωτερικό σημείο) ή $x = 1$. Άρα το $x = 1$ είναι κρίσιμο σημείο της f .

iii) $f''(x) = 4 \ln x + 4$. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1} = 1/e$.

x	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	0	-	0	+
$f(x)$				$+\infty$
	TM	OE		
	$f(0) = 0$	$f(1) = -1$		

$$f(A) = [-1, +\infty)$$

x	0	$1/e$	$+\infty$	
$f''(x)$		-	0	+
$f(x)$				

ΣΚ
 $A\left(\frac{1}{e}, -\frac{3}{e^2}\right)$

iv) Ισχύει $f(x) \geq -1$ με την ισότητα μόνο για $x = 1$, οπότε

$$2 + f(g(1) - 2) + f(g'(1) - 1) \leq 0 \Leftrightarrow f(g(1) - 2) + f(g'(1) - 1) \leq -2$$

Αφού $f(x) \geq -1$ πρέπει $f(g(1) - 2) = -1$ και $f(g'(1) - 1) = -1$.

Άρα $g(1) - 2 = 1 \Rightarrow g(1) = 3$ και $g'(1) - 1 = 1 \Rightarrow g'(1) = 2$.

v) α)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 3}{\eta\mu(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{\eta\mu(x^2 - 1)} \cdot \frac{1}{x + 1} \right) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1 = g'(1) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\beta') \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 3}{f(x) + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{g(x) - 3}{x - 1}}{\frac{f(x) + 1}{x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \cdot \frac{x - 1}{f(x) - f(1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{f(x) - 1} \stackrel{DHL}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f'(x)}.$$

Η f είναι κυρτή στο $[-\frac{1}{e}, +\infty)$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε

$$\text{για } x > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{f'(x)} = +\infty.$$

$$\text{και για } x < 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{f'(x)} = -\infty.$$

Άρα το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 3}{f(x) + 1}$ δεν υπάρχει.

$$\gamma') \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{\eta\mu(\pi x) - 1} = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\eta\mu(\pi x) - 1} = +\infty \text{ αφού}$$

$$0 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(0) > f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) < 0, \text{ γιατί } f \text{ γνησίως φθίνουσα στο } [0, 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (\eta\mu(\pi x) - 1) = \eta\mu\frac{\pi}{2} - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ και } \eta\mu(\pi x) - 1 < 0 \text{ για } x \text{ κοντά στο } \frac{1}{2}$$

vi) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = (x+1) \int_0^1 (-1-f(x))dx - (f(\gamma)+1)(x-1)$, $x \in [-1, 1]$.

Η h είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ ως πολυωνυμική.

$$h(-1) = 2(f(\gamma) + 1) > 0 \text{ γιατί } f(x) \geq -1 \text{ και το } = \text{ για } x = 1 \stackrel{\gamma \neq 1}{\Rightarrow} f(\gamma) + 1 > 0$$

$$h(1) = 2 \int_0^1 (-1 - f(x)) dx < 0 \text{ αφού ισχύει } f(x) \geq -1 \Rightarrow -1 - f(x) \leq 0 \text{ και το } = \text{ για}$$

$$x = 1 \text{ άρα } \int_0^1 (-1 - f(x)) dx < 0$$

άρα από Θ . Bolzano η $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 1)$ και επειδή είναι πολυωνυμική 1ου βαθμού είναι μοναδική.