Άσκηση 14

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(\eta\mu x)$ και $g(x) = \ln(\sigma\upsilon\nu x)$ ορισμένες στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

i) Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και g ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και να βρείτε το σύνολο τιμών τους.

ii) Να δείξετε ότι $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ και $f(x) \ge g(x)$ για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

iii) Να αποδείξετε ότι:

α′) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\left(e^{f(x)} f'(x)\right)^2 + \left(e^{g(x)} g'(x)\right)^2\right] dx = \frac{1}{2}$.

β′) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\left(e^{f(x)}\right)^2 dx - \int_{1}^{\frac{1}{2}} x\left(e^{g(x)}\right)^2 dx = \frac{3}{8}$.

γ′) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} e^{f(x)} dx \ge \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} e^{g(x)} dx$, όπου $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

δ′) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} \left(e^{f(x)} - e^{g(x)}\right) dx \ge \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} 1 dx$ για κάθε $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

iv) Να δείξετε ότι $\left|e^{f(x)} - e^{f(y)}\right| + \left|e^{g(x)} - e^{g(y)}\right| \le 2|x - y|$ για κάθε $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση

i) $f(x) = \ln(\eta\mu x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(\eta\mu x)'}{\eta\mu x} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} > 0$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$f''(x) = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x} < 0$, άρα f κοίλη στο $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$f(A) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = (-\infty, \ln 1) = (-\infty, 0)$.

$g(x) = \ln(\sigma\upsilon\nu x) \Rightarrow g'(x) = \dfrac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x} = -\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} < 0$, άρα g γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$g''(x) = -\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} < 0$, άρα g κοίλη στο $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$g(A) = \left(\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} g(x), \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)\right) = (-\infty, \ln 1) = (-\infty, 0)$.

ii) Έστω $h(x) = f(x) - g(x) = \ln(\eta\mu x) - \ln(\sigma\upsilon\nu x) = \ln(\epsilon\phi x)$.
Για $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right] \Rightarrow \epsilon\phi x \leq 1 \Rightarrow \ln(\epsilon\phi x) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq g(x)$.
Για $x \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \epsilon\phi x \geq 1 \Rightarrow \ln(\epsilon\phi x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq g(x)$.

iii) α′) Είναι $e^{f(x)} f'(x) = \eta\mu x \cdot \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \sigma\upsilon\nu x$ και $e^{g(x)} g'(x) = \sigma\upsilon\nu x \cdot \left(-\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right) = -\eta\mu x$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\sigma\upsilon\nu^2 x + (-\eta\mu x)^2\right] dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1 dx = \Big[x\Big]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{2}$$

β′) $$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x e^{2f(x)} dx - \int_{1}^{\frac{1}{2}} x e^{2g(x)} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\eta\mu^2 x dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\sigma\upsilon\nu^2 x dx =$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

γ′) $$\int_{\pi/4}^{\alpha} e^{f(x)} dx \geq \int_{\pi/4}^{\alpha} e^{g(x)} dx \Leftrightarrow \int_{\pi/4}^{\alpha} (e^{f(x)} - e^{g(x)}) dx \geq 0.$$
Για $x \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \alpha\right]$ είναι $x \geq \dfrac{\pi}{4} \overset{(ii)}{\Longrightarrow} f(x) \geq g(x) \Rightarrow e^{f(x)} \geq e^{g(x)} \Rightarrow e^{f(x)} - e^{g(x)} \geq 0$
άρα για κάθε $\alpha \geq \pi/4$ είναι $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\alpha} (e^{f(x)} - e^{g(x)}) dx \geq 0$.

δ′) $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} (e^{f(x)} - e^{g(x)}) dx \geq \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} 1 dx \Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} (e^{f(x)} - e^{g(x)} + 1) dx \geq 0$$

Έστω $\phi(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + 1$

Για $x \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $\eta\mu x \geq \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x \geq 0 \Rightarrow \phi(x) \geq 1 > 0$.
Αφού $\alpha \geq \dfrac{\pi}{4}$ και $\phi(x) > 0$ τότε $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} (e^{f(x)} - e^{g(x)} + 1) dx \geq 0$

iv) Έστω $K(x) = e^{f(x)} = ημx$ και $M(x) = e^{g(x)} = συνx$

Αν $x = y$: $0 + 0 \leq 0$ ισχύει ως ισότητα

Αν $x \neq y$ χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω $x < y$

Η K είναι συνεχής στο $[x, y]$ και παραγωγίσιμη στο (x, y). Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1 \in (x, y)$ ώστε

$$K'(\xi_1) = \frac{K(y) - K(x)}{y - x} = συν\xi_1 \Rightarrow |e^{f(y)} - e^{f(x)}| = |συν\xi_1| \cdot |y - x| \leq |y - x|$$

Η M είναι συνεχής στο $[x, y]$ και παραγωγίσιμη στο (x, y). Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_2 \in (x, y)$ ώστε

$$M'(\xi_2) = \frac{M(y) - M(x)}{y - x} = -ημ\xi_2 \Rightarrow |e^{g(y)} - e^{g(x)}| = |-ημ\xi_2| \cdot |y - x| \leq |y - x|$$

Προσθέτοντας κατά μέλη: $|e^{f(x)} - e^{f(y)}| + |e^{g(x)} - e^{g(y)}| \leq 2|x - y|$.