

Άσκηση 149

i) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + x \ln x$, $x > 0$.

α') Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β') Να δείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα x_0 που βρίσκεται στο $(2, e)$.

ii) Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7}{4}x^2 + \frac{x^2}{2} \ln x$, $x > 0$.

α') Να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β') Να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

γ') Να δείξετε ότι η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, έστω x_1 με $x_1 \in (x_0, 4)$, όπου x_0 η ρίζα της $f(x) = 0$.

iii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = -\frac{x^2}{2} \ln x$ και

$h(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7}{4}x^2$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο οι εφαπτόμενες σχηματίζουν με την $y = f(x_0)$ τρίγωνο.

iv) Αν $d(x) = |g(x) - h(x)|$, $x \in (0, x_1]$, να αποδείξετε ότι $d_{\max} = -\varphi(x_0)$.

Λύση

i) α') Η $f(x) = x^2 - 3x + x \ln x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = 2x - 3 + \ln x + 1 = 2x - 2 + \ln x$$

Είναι $f''(x) = 2 + \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

- Για $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) = 0$
- Για $x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) = 0$

x	0	1	$+\infty$	
f'		-	0	+
f	0			$+\infty$

OE
 $f(1) = -2$

β') Η f είναι συνεχής στο $[2, e]$ με

- $2 \ln 2 - 2 = 2(\ln 2 - 1) < 0$
- $f(e) = e^2 - 2e = e(e - 2) > 0$

$f(2) \cdot f(e) < 0$, από το Θ. Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον μία ρίζα $x_0 \in (2, e)$.

- Στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$, η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε

$$f(\Delta_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [-2, 0)$$

Επειδή $0 \notin f(\Delta_1)$, η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο Δ_1 .

- Στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$, η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε

$$f(\Delta_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-2, +\infty)$$

Επειδή $0 \in f(\Delta_2)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα $x_0 \in (2, e) \subset \Delta_2$ είναι μοναδική.

Άρα, η x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(0, +\infty)$.

ii) α') Η $\varphi(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7}{4}x^2 + \frac{x^2}{2} \ln x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\varphi'(x) = x^2 - \frac{7}{2}x + x \ln x + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} = x^2 - 3x + x \ln x = f(x)$$

- Για $0 < x \leq 1 \Rightarrow x \in \Delta_1$, οπότε $\varphi'(x) = f(x) \in [-2, 0) \Rightarrow \varphi'(x) < 0$.
- Για $1 < x < x_0$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα $f(x) < f(x_0) \Rightarrow \varphi'(x) < 0$.
- Για $x > x_0$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα $f(x) > f(x_0) \Rightarrow \varphi'(x) > 0$.

Συνεπώς, για κάθε $x \in (0, x_0)$ είναι $\varphi'(x) < 0$, ενώ για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$ είναι $\varphi'(x) > 0$.

x	0	x_0	$+\infty$
φ'		-	+
φ	0	0	$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$
 OE
 $\varphi(x_0)$

β') Η φ' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $\varphi''(x) = f'(x) = 2x - 2 + \ln x$.

x	0	1	$+\infty$
φ''		-	+
φ		↪	↪

$\Sigma\kappa$
 $\left(1, -\frac{17}{12}\right)$

γ') Η φ είναι συνεχής στο $[x_0, 4]$

- Επειδή $2 < x_0$ και αφού η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, x_0]$, προκύπτει

$$\varphi(x_0) < \varphi(2) = \frac{8}{3} - 7 + 2 \ln 2 = -\frac{13}{3} + \ln 4 < 0$$
- $$\varphi(4) = \frac{64}{3} - 28 + 8 \ln 4 = -\frac{20}{3} + 16 \ln 2 > 0$$

άρα από Θ. Bolzano η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_1 \in (x_0, 4)$.

Στο διάστημα $\Delta_1 = (0, x_0]$, η φ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε

$$\varphi(\Delta_1) = \left[\varphi(x_0), \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) \right) = [\varphi(x_0), 0)$$

Επειδή $0 \notin \varphi(\Delta_1)$ η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ είναι αδύνατη στο Δ_1 .

Στο διάστημα $\Delta_2 = [x_0, +\infty)$, η φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε

$$\varphi(\Delta_2) = \left[\varphi(x_0), \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \right) = [\varphi(x_0), +\infty)$$

Επειδή $0 \in \varphi(\Delta_2)$ και η φ είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα $x_1 \in (x_0, 4) \subset \Delta_2$ είναι μοναδική.

Άρα, η x_1 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\varphi(x) = 0$ στο $(0, +\infty)$.

iii) α' τρόπος

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_g και C_h , λύνουμε την εξίσωση

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} \ln x = \frac{x^3}{3} - \frac{7}{4}x^2 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$$

Συνεπώς, οι γραφικές παραστάσεις C_g και C_h έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $M(x_1, g(x_1))$.

Οι εξισώσεις των εφαπτομένων των C_g, C_h στο x_1 είναι

- $(\varepsilon_1) : y - g(x_1) = g'(x_1)(x - x_1)$
- $(\varepsilon_2) : y - h(x_1) = h'(x_1)(x - x_1)$

Οι (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο κοινό σημείο $M(x_1, g(x_1))$. Η τρίτη ευθεία είναι η $(\varepsilon_3) : y = f(x_0) = 0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$.

Το σημείο τομής τους $M(x_1, g(x_1))$ δεν ανήκει στην ευθεία $y = 0$, διότι $g(x_1) \neq 0$ (αφού $x_1 > 2 \Rightarrow x_1 \neq 1$)

και $1 < x_0 < x_1 \xrightarrow{f \text{ γν. αυξ.}} f(x_0) < f(x_1) \Rightarrow 0 < \varphi'(x_1) \Rightarrow 0 < h'(x_1) - g'(x_1) \Rightarrow g'(x_1) < h'(x_1)$ οπότε οι (ε_1) και (ε_2) δεν είναι παράλληλες.

Επίσης

- $g'(x_1) = 0 \Leftrightarrow -x_1 \ln x_1 - \frac{x_1}{2} = 0 \xLeftrightarrow{x_1 > 0} \ln x_1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Άτοπο, αφού $x_1 > x_0 > 2$. Άρα $g'(x_1) \neq 0$.
- $h'(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - \frac{7}{2}x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 \left(x_1 - \frac{7}{2} \right) = 0 \xLeftrightarrow{x_1 > 0} x_1 = \frac{7}{2}$.

Επειδή το x_1 είναι το κοινό σημείο των C_g, C_h , θα έπρεπε $g\left(\frac{7}{2}\right) = h\left(\frac{7}{2}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{6}$, άτοπο αφού $\ln\left(\frac{7}{2}\right) \simeq 1,2 \neq \frac{7}{6}$. Άρα $h'(x_1) \neq 0$.

Συνεπώς, οι ευθείες (ε_1) , (ε_2) , (ε_3) έχουν διαφορετικές κλίσεις μεταξύ τους και δεν συντρέχουν, άρα σχηματίζουν τρίγωνο.

β' τρόπος

Οι γραφικές παραστάσεις C_g, C_h τέμνονται στο μοναδικό σημείο $M(x_1, g(x_1))$.

Θα βρούμε τα σημεία τομής των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ με την $(\varepsilon_3) : y = 0$

- Για το K : $0 - g(x_1) = g'(x_1)(x_K - x_1)$. Αν ήταν $g'(x_1) = 0$, τότε από τη σχέση αυτή θα είχαμε $g(x_1) = 0$, που είναι άτοπο διότι $x_1 \in (x_0, 4)$ με $x_0 > 2$, άρα $x_1 \neq 1$. Συνεπώς $g'(x_1) \neq 0$, οπότε

$$x_K = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} \Rightarrow K \left(x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)}, 0 \right)$$

- Για το Λ : $0 - h(x_1) = h'(x_1)(x_\Lambda - x_1)$. Ομοίως, αν ήταν $h'(x_1) = 0$, τότε θα έπρεπε $h(x_1) = 0 \Rightarrow g(x_1) = 0$, που είναι άτοπο. Συνεπώς $h'(x_1) \neq 0$, οπότε

$$x_\Lambda = x_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)} \Rightarrow \Lambda \left(x_1 - \frac{g(x_1)}{h'(x_1)}, 0 \right)$$

Για να σχηματίζουν τα σημεία $M(x_1, g(x_1)), K(x_K, 0), \Lambda(x_\Lambda, 0)$ τρίγωνο πρέπει

$$\det(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KL}) \neq 0$$

Είναι

$$\det(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KL}) = \begin{vmatrix} x_M - x_K & y_M - y_K \\ x_\Lambda - x_K & y_\Lambda - y_K \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} & g(x_1) \\ \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} - \frac{g(x_1)}{h'(x_1)} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$0 - g(x_1) \cdot \left[\frac{g(x_1)}{g'(x_1)} - \frac{g(x_1)}{h'(x_1)} \right] = -g^2(x_1) \cdot \frac{h'(x_1) - g'(x_1)}{g'(x_1) \cdot h'(x_1)} \neq 0$$

αφού $g(x_1) \neq 0$ και $h'(x_1) - g'(x_1) = f(x_1) \neq 0$ (διότι $x_1 > x_0$), άρα τα σημεία M, K, Λ δεν είναι συνευθειακά, οπότε σχηματίζουν τρίγωνο.

iv) Για $x \in (0, x_1]$ ισχύει $\varphi(x) \leq 0$, οπότε

$$d(x) = |g(x) - h(x)| = |-\varphi(x)| = -\varphi(x)$$

άρα

$$d'(x) = -\varphi'(x) = -f(x)$$

x	0	x_0	x_1
d'		+	-
d			

O.M.
 $-\varphi(x_0)$

Συνεπώς η $d(x)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x = x_0$ με τιμή

$$d_{\max} = d(x_0) = -\varphi(x_0)$$