Άσκηση 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$.

i) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2\sqrt{e}$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

iv) Έστω E το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 5$. Να δείξετε ότι $2E > e^2 - 4e + 36$.

v) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(e^{x-1} + x - 2) + f(\ln(3-x) - x + 2) = 2e$ έχει μοναδική λύση στο $(1, 2)$.

Λύση

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x e^{\frac{1}{x}} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{u\to +\infty} \dfrac{e^u}{u} \overset{DHL}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} e^u = +\infty$

Άρα η $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{1/x} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{u\to 0} e^u = 1 = \lambda$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x(e^{1/x} - 1) \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{e^u - 1}{u} = 1 = \beta$

Άρα η $y = x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$

ii) $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x e^{\frac{1}{x}} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}} \dfrac{x-1}{x}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0 ‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$

TE

$f(1) = e$

$f(A) = (-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$

$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \dfrac{x-1}{x} + e^{\frac{1}{x}} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$		⌢	‖	⌣	

iii) $2\sqrt{e} \notin f((-\infty, 0))$ άρα η $f(x) = 2\sqrt{e}$ δεν έχει λύση στο $(-\infty, 0)$

$2\sqrt{e} \in f((0,1))$ άρα η $f(x) = 2\sqrt{e}$ έχει λύση στο $(0,1)$ και επειδή είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,1) είναι μοναδική

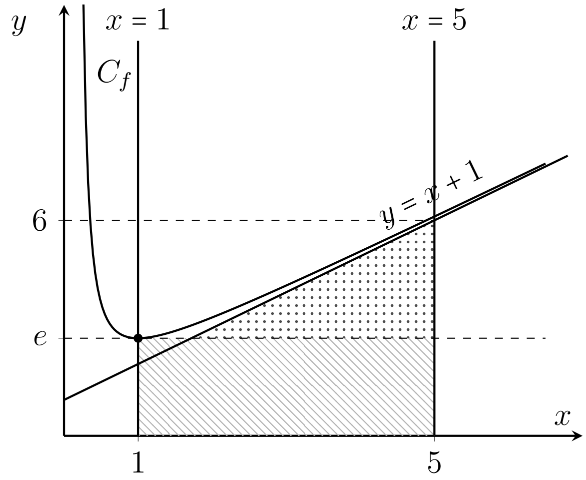
$2\sqrt{e} \in f((1,+\infty))$ άρα η $f(x) = 2\sqrt{e}$ έχει λύση στο $(1,+\infty)$ ($f(1) = e \neq 2\sqrt{e}$) και επειδή είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ είναι μοναδική

Παρατηρούμε ότι $f(2) = 2e^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{e}$, άρα $x = 2$ η μία ρίζα.

iv) $E_{\text{ορθ}} = (5-1)\cdot e = 4e$

$E_{\tau\rho\iota\gamma} = \dfrac{1}{2}(6-e)^2 = \dfrac{36-12e+e^2}{2}$

άρα $E(\Omega) > E_{o\rho\vartheta} + E_{\tau\rho\iota\gamma} \Leftrightarrow 2E(\Omega) > e^2 - 4e + 36$.



v) Έστω οι συναρτήσεις $u(x) = e^{x-1} + x - 2$ και $v(x) = \ln(3-x) - x + 2$.

Για $x > 0$ η f έχει ολικό ελάχιστο στο $x = 1$ το $f(1) = e$ άρα $f(x) \geq e$ και το $=$ μόνο για $x = 1$

Για $x \in (1,2)$ ισχύει $u(x), v(x) > 0$

Η εξίσωση $f(u(x)) + f(v(x)) = 2e$ ισχύει μόνο αν $f(u(x)) = e$ και $f(v(x)) = e$, δηλαδή $u(x) = 1$ και $v(x) = 1$

$u(x) = 1 \Leftrightarrow e^{x-1} + x - 3 = 0$. Θέτω $g(x) = e^{x-1} + x - 3$

Είναι g συνεχής στο [1,2]
$g(1) = -1 < 0$
$g(2) = e - 1 > 0$ άρα από Θ. Bolzano η $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_0 \in (1,2)$ και $g'(x) > 0$ άρα μοναδική

$e^{x_0-1} = 3 - x_0 \Rightarrow x_0 - 1 = \ln(3-x_0) \Leftrightarrow v(x_0) = 1$.

Συνεπώς, η x_0 είναι η μοναδική λύση στο $(1,2)$.