

Άσκηση 150

Δίνεται συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

- $\frac{4}{x^2}f(x) = 2\ln x - 3$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

- $f(0) - 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x - 1}{\eta\mu x}$

i) Να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}(2\ln x - 3) & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

ii) α') Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β') Να δείξετε ότι η C_f εφάπτεται του άξονα $x'x$ στην αρχή των αξόνων.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^2 - 3x + \frac{5}{4}$

iii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των C_f, C_g έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία και να δείξετε ότι σε ένα από αυτά δέχονται κοινή εφαπτομένη, η οποία και να βρεθεί.

Λύση

i) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε

$$\frac{4}{x^2}f(x) = 2 \ln x - 3 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 3)$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x - 1}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} - 1}{\frac{\eta\mu x}{x}}$$

με

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1 - 1}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = 0$$

$$\text{άρα } f(0) - 1 = \frac{0 - 1}{1} \Rightarrow f(0) = 0, \text{ επομένως } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 3) & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

ii) α') Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 3) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2 \right) = 0$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = 0.$$

Συνεπώς, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β') Είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^2}{4}(2 \ln x - 3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{4}(2 \ln x - 3) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2}x \ln x - \frac{3}{4}x \right) = 0 \end{aligned}$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 0$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 0$ είναι

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y = 0$$

Συνεπώς, η C_f εφάπτεται του άξονα $x'x$ στην αρχή των αξόνων.

iii) Έχουμε $f(0) = 0$ και $g(0) = \frac{5}{4}$. Επειδή $f(0) \neq g(0)$, το $x = 0$ δεν είναι κοινό σημείο των C_f, C_g .

Για $x > 0$ για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f, C_g , θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{7}{4}x^2 + 3x - \frac{5}{4}, \quad x > 0$$

Η h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$h'(x) = x \ln x + \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{7}{2}x + 3 = x \ln x - 3x + 3$$

$$h''(x) = \ln x + 1 - 3 = \ln x - 2$$

x	0	e^2		$+\infty$
h''		-	0	+
h'	3			$+\infty$

OE
 $3 - e^2$

- Στο διάστημα $\Delta_1 = (0, e^2]$, η h' είναι γνησίως φθίνουσα. Παρατηρούμε ότι $h'(1) = 1 \cdot \ln 1 - 3(1) + 3 = 0$. Συνεπώς, η ρίζα $x = 1$ είναι μοναδική στο διάστημα αυτό.
- Στο διάστημα $\Delta_2 = [e^2, +\infty)$, η h' είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή είναι συνεχής με $h'(e^2) < 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x) = +\infty$, η h' έχει άλλη μία μοναδική ρίζα, έστω $\rho > e^2$.

x	0	1	ρ	$+\infty$			
h'		+	0	-	0	+	
h	$-\frac{5}{4}$		0		$h(\rho)$		$+\infty$

T.M.
 $h(1) = 0$

Παρατηρούμε ότι $h(1) = 0 \Rightarrow f(1) = g(1)$

- Στο διάστημα $(0, 1]$, η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $h(x) < h(1) = 0$.
- Στο διάστημα $[1, \rho]$, η h είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε για κάθε $x \in (1, \rho]$ είναι $h(x) < h(1) = 0$. Συνεπώς, η $h(\rho) < 0$.
- Στο διάστημα $[\rho, +\infty)$, η h είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, με $h(\rho) < 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$. Επομένως υπάρχει μοναδικό $x_3 \in (\rho, +\infty)$ με $h(x_3) = 0$.

Συνεπώς, η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x = 1$ και $x = x_3$, άρα οι C_f, C_g έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία.

- Στο $x = 1$ ισχύει $h'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = g'(1)$, άρα οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο $A\left(1, -\frac{3}{4}\right)$ με εξίσωση

$$(\varepsilon) : y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Rightarrow y = -x + \frac{1}{4}$$

- Στο $x = x_3$ επειδή $x_3 > \rho$ είναι $h'(x_3) > 0 \Leftrightarrow f'(x_3) > g'(x_3)$. Άρα, στο δεύτερο κοινό σημείο οι C_f, C_g δεν έχουν κοινή εφαπτομένη.