Άσκηση 16

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f:[-e,e]\to\mathbb{R}$για την οποία ισχύει $x^2+f^2(x)=e^2$ για κάθε $x\in[-e,e]$ και $f(0)>0$.

i) Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-e,e)$.

ii) Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{e^2-x^2}\,,\ x\in[-e,e]$.

iii) Να αποδείξετε ότι:

α΄) $$\int_0^e f^2(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^e\left(f^2(x)+f^2(e-x)\right)dx$$

β΄) $$\int_0^e\frac{2026^x}{2026^x+2026^{e-x}}dx=\frac{e}{2}.$$

Επιπλέον δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{x}\ ,\ x\geq 0$.

iv) Να βρείτε τη συνάρτηση $h=f^2\circ g$.

v) Αν $h(x)=e^2-x\ ,\ x\in[0,e^2]$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f^2 και h.

Λύση

i) $f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \Leftrightarrow e^2-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm e$

Άρα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(-e,e)$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-e,e)$.

ii) Αφού $f(0)>0$, τότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-e,e)$, οπότε

$f^2(x)=e^2-x^2 \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{e^2-x^2}\ ,\ x\in(-e,e)$

και $f(-e)=f(e)=0$ άρα $f(x)=\sqrt{e^2-x^2}$ για κάθε $x\in[-e,e]$.

iii) α′) Θέτουμε $u=e-x$, τότε $du=-dx$ και $\int_0^e f^2(e-x)dx=\int_e^0 f^2(u)(-du)=\int_0^e f^2(u)du=\int_0^e f^2(x)dx$.

άρα $\int_0^e (f^2(x)+f^2(e-x))dx=\int_0^e f^2(x)dx+\int_0^e f^2(x)dx=2\int_0^e f^2(x)dx$

Οπότε $\int_0^e f^2(x)dx=\dfrac{1}{2}\int_0^e (f^2(x)+f^2(e-x))dx$.

β′) Έστω $I=\int_0^e \dfrac{2026^x}{2026^x+2026^{e-x}}dx$. Θέτω $u=e-x$ οπότε

$I=\int_0^e \dfrac{2026^{e-u}}{2026^{e-u}+2026^u}du=\int_0^e \dfrac{2026^{e-x}}{2026^{e-x}+2026^x}dx$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$2I=\int_0^e \dfrac{2026^x}{2026^x+2026^{e-x}}dx+\int_0^e \dfrac{2026^{e-x}}{2026^x+2026^{e-x}}dx=\int_0^e \dfrac{2026^x+2026^{e-x}}{2026^x+2026^{e-x}}dx$

$2I=\int_0^e 1dx=\Big[x\Big]_0^e=e \Rightarrow I=\dfrac{e}{2}$

iv) $D_h=\{x\in D_g : g(x)\in D_{f^2}\}=\{x\geq 0 : \sqrt{x}\in[-e,e]\}$

Άρα $0\leq\sqrt{x}\leq e \Leftrightarrow 0\leq x\leq e^2$, οπότε $D_h=[0,e^2]$

$h(x)=f^2(g(x))=e^2-(\sqrt{x})^2=e^2-x,\ x\in[0,e^2]$

v) $f^2(x)=h(x)\Leftrightarrow e^2-x^2=e^2-x\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow x(x-1)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$

Για $x\in[0,1]$ ισχύει $x^2\leq x\Rightarrow -x^2\geq -x\Rightarrow e^2-x^2\geq e^2-x$ άρα $f^2(x)\geq h(x)$

$E(\Omega)=\int_0^1 |f^2(x)-h(x)|dx=\int_0^1 (e^2-x^2-(e^2-x))dx=\int_0^1 (x-x^2)dx=$

$\left[\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$