Άσκηση 17

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{e^{2x}-e^{2\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}$.

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\eta\mu x, x)$ τέτοιο, ώστε $f(x)=2e^{2\xi}$.

ii) Να βρεθεί το $\kappa\in\mathbb{R}$, όπου $\kappa=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{2\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}$.

iii) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{\kappa}{2}\cdot x^2$, $x\in\mathbb{R}$ και το σημείο $A(3,0)$.

α΄) Να βρεθεί σημείο $M(x,y)$ της C_g που απέχει από το A τη μικρότερη απόσταση.

β΄) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο M είναι κάθετη της AM.

γ΄) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g, τον άξονα $x'x$ και την AM.

Λύση

i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(t) = e^{2t}$ στο διάστημα $[\eta\mu x, x]$, $x \in (0, \pi)$

Η h είναι συνεχής στο $[\eta\mu x, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(\eta\mu x, x)$ με $h'(t) = 2e^{2t}$

Από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in (\eta\mu x, x)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{h(x) - h(\eta\mu x)}{x - \eta\mu x} = h'(\xi) \iff \frac{e^{2x} - e^{2\eta\mu x}}{x - \eta\mu x} = 2e^{2\xi} \iff f(x) = 2e^{2\xi}$$

ii) Για $x \in (0, \pi)$ ισχύει $0 < \eta\mu x < x \Leftrightarrow 2e^{2\eta\mu x} < 2e^{2\xi} < 2e^{2x} \Leftrightarrow 2e^{2\eta\mu x} < f(x) < 2e^{2x}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(2e^{2\eta\mu x}) = 2$ και $\lim\limits_{x\to 0}(2e^{2x}) = 2$

άρα από ΚΠ έχουμε $\kappa = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$

iii) Είναι $g(x) = x^2$ και $A(3, 0)$

α΄) Έστω σημείο $M(x, x^2)$ της C_g. Η απόσταση του M από το $A(3, 0)$ δίνεται από τη συνάρτηση

$$d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2 - 0)^2} = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

$$d'(x) = \frac{(x^4 + x^2 - 6x + 9)'}{2\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}} = \frac{4x^3 + 2x - 6}{2\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}} = \frac{(x-1)(2x^2 + 2x + 3)}{\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$d'(x)$	$-$	0	$+$
$d(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Ο.Ε.
$d(1) = \sqrt{5}$

άρα $M(1, 1)$

β΄) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_g στο $M(1, 1)$ είναι

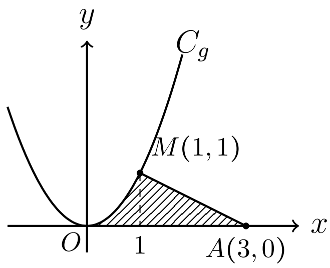
$\lambda_1 = g'(1) = 2$

Ο συντελεστής διεύθυνσης του τμήματος AM είναι $\lambda_2 = \dfrac{1-0}{1-3} = -\dfrac{1}{2}$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1$ άρα η εφαπτομένη στο M είναι κάθετη στην AM.

γ′)

$$E_1 = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$



$$E_2 = \frac{1}{2}\cdot(3-1)\cdot 1 = 1$$

Άρα το συνολικό εμβαδόν είναι $E = \dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{4}{3}$