Άσκηση 18

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- $f'(x)=e^{x-1-f(x)}-e^{\ln x-f(x)}$ για κάθε $x>0$
- $f(1)=-\ln 2$

i) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατο στο $(0,+\infty)$.

ii) Να δείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\ln\left(e^{x-1}-\frac{x^2}{2}\right) & ,\ x>0\\ -1 & ,\ x=0\end{cases}$.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iv) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M\left(0,f(0)\right)$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η $y=x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

v) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f(x)+\ln 2}{e^{x-1}-x}\cdot\dfrac{1}{\etaμ(x-1)}\right)$.

Λύση

i) Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο σε σημείο $x_0 \in (0,+\infty)$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (0,+\infty)$ από το Θεώρημα Fermat $f'(x_0) = 0$.

Η δοσμένη σχέση $f'(x) = e^{x-1-f(x)} - e^{\ln x - f(x)}$ για $x = x_0$ δίνει

$$0 = e^{x_0-1-f(x_0)} - e^{\ln x_0 - f(x_0)} \Leftrightarrow e^{x_0-1-f(x_0)} = e^{\ln x_0 - f(x_0)} \Leftrightarrow$$

$$x_0 - 1 - f(x_0) = \ln x_0 - f(x_0) \Leftrightarrow \ln x_0 = x_0 - 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-1-f(x)} - e^{\ln x - f(x)} > 0 \Leftrightarrow e^{x-1-f(x)} > e^{\ln x - f(x)} \Leftrightarrow$$

$$x - 1 - f(x) > \ln x - f(x) \Leftrightarrow \ln x < x - 1$$

που ισχύει για κάθε $0 < x \neq 1$

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\nearrow$	

O.E.
$f(0)$

ii) Για $x > 0$ έχουμε $f'(x)e^{f(x)} = e^{x-1} - x \Rightarrow \left(e^{f(x)}\right)' = \left(e^{x-1} - \dfrac{x^2}{2}\right)' \Rightarrow e^{f(x)} = e^{x-1} - \dfrac{x^2}{2} + c$

Οπότε για $x = 1$ προκύπτει $e^{f(1)} = e^0 - \dfrac{1}{2} + c \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + c \Rightarrow c = 0.$

άρα $f(x) = \ln\left(e^{x-1} - \dfrac{x^2}{2}\right)$ για $x > 0$ και f συνεχής στο $x = 0$ άρα

$f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(e^{x-1} - \frac{x^2}{2}\right) = \ln(e^{-1}) = -1$

οπότε $f(x) = \begin{cases} \ln\left(e^{x-1} - \dfrac{x^2}{2}\right) & , \ x > 0 \\ -1 & , \ x = 0 \end{cases}$

iii)

$$f(A) = f([0,+\infty)) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = [-1,+\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(e^{x-1} - \frac{x^2}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left[e^{x-1}\left(1 - \frac{x^2}{2e^{x-1}}\right)\right] = +\infty$$

αφού

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x-1}} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{x-1}} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^{x-1}} = 0$$

iv) $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\left(e^{x-1}-\dfrac{x^2}{2}\right)+1}{x} \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{x-1}-x}{e^{x-1}-\dfrac{x^2}{2}} = \dfrac{e^{-1}}{e^{-1}} = 1.$

Η εφαπτομένη στο 0 έχει εξίσωση

$$y+1 = 1(x-0) \Rightarrow y = x-1$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-1)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{x-1}-\frac{x^2}{2}\right)-(x-1)\right] =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{x-1}-\frac{x^2}{2}\right)-\ln(e^{x-1})\right] = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{2e^{x-1}}\right) = \ln 1 = 0$$

Άρα η $y = x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

v) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f(x)-f(1)}{e^{x-1}-x}\cdot\dfrac{1}{\text{ημ}(x-1)}\right) = 0$ από ΚΠ διότι

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{e^{x-1}-x} \underset{\substack{f\ \text{παρ/μη}\\ \text{στο } 1}}{\overset{DLH}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{e^{x-1}-1} \underset{\substack{f'\ \text{παρ/μη}\\ \text{στο } 1}}{\overset{DLH}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{f''(x)}{e^{x-1}} \overset{\substack{f''\ \text{συν/ης}\\ \text{στο } 1}}{=} f''(1) = 0$$

Από τη σχέση $f'(x) = e^{x-1-f(x)} - e^{\ln x - f(x)}$ έχουμε ότι η f' είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = e^{x-1-f(x)}\cdot(x-1-f(x))' - e^{\ln x-f(x)}\cdot(\ln x - f(x))'$$

$$= e^{x-1-f(x)}\cdot(1-f'(x)) - e^{\ln x-f(x)}\cdot\left(\frac{1}{x}-f'(x)\right)$$

και για $x = 1$ έχουμε

$$f''(1) = e^{1-1-f(1)}\cdot(1-0) - e^{\ln 1-f(1)}\cdot(1-0)$$

$$f''(1) = e^{-f(1)}\cdot 1 - e^{-f(1)}\cdot 1$$

$$f''(1) = e^{-f(1)} - e^{-f(1)} = 0$$