

## Άσκηση 19

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν

- $f'(x) - f(x) \ln |f(x)| = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f(1) = e$

i) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = e^{e^{x-1}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

ii) Να δείξετε ότι  $f(x) > 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

iii) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha') \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{e-1}{e}.$$

$$\beta') \int_0^1 \frac{f''(x)}{f(x)} dx > \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx.$$

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \ln(xe)$ ,  $x > 0$ .

iv) α) Να βρείτε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$ .

β) Να εξετάσετε αν  $h^{-1} = \varphi$ , όπου  $\varphi(x) = \ln x$ ,  $x > 0$ .

γ) Να λυθεί η εξίσωση  $h(\varphi(x)) = \frac{x^2 + 5x - 4}{x^2 + 1}$ .

## Λύση

- i) Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  (ως παραγωγίσιμη) και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , άρα από συνέπειες του Θεωρήματος Bolzano, η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$  και  $f(1) = e > 0 \Rightarrow f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f'(x) - f(x) \ln(f(x)) = 0 &\iff \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(f(x)) \iff (\ln(f(x)))' = \ln(f(x)) \\ &\iff (\ln(f(x)))' - \ln(f(x)) = 0 \iff e^{-x} (\ln(f(x)))' - e^{-x} \ln(f(x)) = 0 \\ &\iff (e^{-x} \ln(f(x)))' = 0 \end{aligned}$$

άρα από συνέπειες ΘΜΤ υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$  ώστε

$$e^{-x} \ln(f(x)) = c \iff \ln(f(x)) = ce^x$$

για  $x = 1$  έχουμε  $\ln(f(1)) = ce \iff \ln e = ce \iff c = e^{-1}$

άρα  $\ln(f(x)) = e^{-1} \cdot e^x = e^{x-1} \iff f(x) = e^{e^{x-1}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- ii) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , ισχύει  $e^{x-1} > 0 \iff e^{e^{x-1}} > e^0 \iff f(x) > 1$

iii) α) Είναι  $\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_0^1 (\ln(f(x)))' dx = [\ln(f(x))]_0^1 = [e^{x-1}]_0^1 = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$ .

β')

$$\begin{aligned} f'(x) = f(x) \ln(f(x)) &\Rightarrow f''(x) = f'(x) \ln(f(x)) + f(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \\ &\Rightarrow f''(x) = f'(x) \ln(f(x)) + f'(x) \end{aligned}$$

Οπότε

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{f'(x) \ln(f(x))}{f(x)} + \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$f(x) > 1 \Rightarrow \ln(f(x)) > 0$  και  $f'(x) = f(x) \ln(f(x)) > 0$  άρα

$$\frac{f''(x)}{f(x)} > \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow \int_0^1 \frac{f''(x)}{f(x)} dx > \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

- iv)  $g(x) = \ln(xe)$ ,  $x > 0 \Rightarrow g(x) = \ln x + 1$ ,  $x > 0$

α')  $D_h = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x > 0 \mid \ln x + 1 \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$

$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{e^{\ln x + 1 - 1}} = e^{e^{\ln x}} = e^x$ ,  $x > 0$ .

β') Η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$  άρα 1-1 και αντιστρέφεται.

$$h(x) = y \Leftrightarrow e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y \text{ με } x > 0 \Leftrightarrow \ln y > 0 \Leftrightarrow y > 1$$

$$\text{άρα } h^{-1}(x) = \ln x, \quad x > 1$$

$D_{h^{-1}} \neq D_\phi$  άρα  $h^{-1}$  και  $\phi$  δεν είναι ίσες.

γ') Για να ορίζεται η  $h(\varphi(x))$  πρέπει

$$\{x \in D_\varphi \text{ και } \varphi(x) \in D_h\} \Leftrightarrow \{x > 0 \text{ και } \ln x > 0\} \Leftrightarrow \{x > 1\}$$

$$h(\varphi(x)) = \frac{x^2 + 5x - 4}{x^2 + 1} \Leftrightarrow x = \frac{x^2 + 5x - 4}{x^2 + 1} \Leftrightarrow$$
$$x^3 + x = x^2 + 5x - 4 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(x - 1) - 4(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(x + 2) = 0$$

Οι ρίζες είναι  $x = 1$ ,  $x = 2$  και  $x = -2$ . Λόγω του περιορισμού οι ρίζες  $x = 1$  και  $x = -2$  απορρίπτονται, ενώ η  $x = 2$  είναι δεκτή.