Άσκηση 2

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}-f'(x)+e^{-x} & ,\ x>0\\ \kappa & ,\ x=0\\ -x^2+\alpha & ,\ x<0\end{cases}\ ,\ \text{όπου } \alpha\in\mathbb{R} \text{ και } \kappa=\int_0^1 xe^x dx.$$

i) Να δείξετε ότι $\alpha=\kappa=1$.

ii) Να δείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{e^x} & ,x>0\\ -x^2+1 & ,x\le 0\end{cases}$.

iii) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

iv) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και στη συνέχεια να δείξετε ότι η ανίσωση $f(e^x+x-2)+f(\ln(2-x)-x)\ge 2$ έχει ακριβώς μία ρίζα, η οποία βρίσκεται στο $(0,1)$.

v) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1,f(1))$ και να δείξετε ότι διαπερνά την C_f στο σημείο αυτό.

vi) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες $y=1$ και $x=1$.

vii) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{x(x-1)}{e^{x-1}}\le 2-ef(x)\le x-1$ για κάθε $x\ge 1$.

viii) Έστω F μία αρχική της f. Να υπολογίσετε τα όρια:

α′) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(0)-\frac{x^2}{2}}{x\ln x-x+1}$.

β′) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{\eta\mu(x-1)}{e\left(F(x)-F(1)\right)+\frac{x^2}{2}-3x+\frac{5}{2}}$.

Λύση

i)

$$\kappa = \int_0^1 xe^x\,dx = \Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e-(e-1) = 1.$$

Η f είναι συνεχής στο $x=0$ άρα

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0^-}(-x^2+\alpha) = \kappa \;\Rightarrow\; \alpha = 1.$$

Επομένως $\alpha = \kappa = 1$.

ii) Για $x>0$ έχουμε

$$f(x) = -f'(x)+e^{-x} \;\Leftrightarrow\; e^x f'(x)+e^x f(x) = 1 \;\Rightarrow\; \big(f(x)e^x\big)' = (x)' \;\Rightarrow\; f(x)e^x = x+c.$$

Η f είναι συνεχής στο $x=0$ άρα

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \;\Rightarrow\; c=1$$

οπότε

$$f(x) = (x+1)e^{-x}\ ,\ x>0$$

Άρα

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-x} & ,\ x>0 \\ 1 & ,\ x=0 \\ -x^2+1 & ,\ x<0 \end{cases} \;\Rightarrow\; f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-x} & ,x>0 \\ -x^2+1 & ,x\le 0 \end{cases}$$

iii)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(x+1)e^{-x}-1}{x} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0^-}\left(e^{-x}-(x+1)e^{-x}\right) = 1-1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2+1-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0)=0$.

iv) Είναι

$$f'(x) = \begin{cases} -xe^{-x} & ,\ x>0, \\ -2x & ,\ x\le 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0 $-$
$f(x)$	$\nearrow$ 1 $\searrow$

ΟΜ

$f(0)=1$

Ισχύει $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το $=$ μόνο για $x = 0$

Για $2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$ έχουμε

$$f(e^x + x - 2) \leq 1 \text{ και το } = \text{ για } e^x + x - 2 = 0,$$

$$f(\ln(2-x) - x) \leq 1 \text{ και το } = \text{ για } \ln(2-x) - x = 0,$$

οπότε

$$f(e^x + x - 2) + f(\ln(2-x) - x) \leq 2.$$

Για να ισχύει $f(e^x + x - 2) + f(\ln(2-x) - x) \geq 2$ πρέπει

$$f(e^x + x - 2) + f(\ln(2-x) - x) = 2 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f(e^x + x - 2) = 1 \\ f(\ln(2-x) - x) = 1 \end{cases}$$

δηλαδή

$$\begin{cases} e^x + x - 2 = 0 \\ \ln(2-x) - x = 0 \end{cases}$$

Θέτω $g(x) = e^x + x - 2$ και $w(x) = \ln(2-x) - x \;,\; x < 2$

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ συνεχής στο } [0,1] \\ g(0) = 1 - 2 < 0 \\ g(1) = e - 1 > 0 \end{array}\right\} \overset{\Theta B}{\Rightarrow} \exists\, \rho \in (0,1) : g(\rho) = 0.$$

$$g'(x) = e^x + 1 > 0 \;\Rightarrow\; g \text{ γν. αύξουσα στο } \mathbb{R} \Rightarrow \text{το } \rho \text{ μοναδικό.}$$

Και

$$g(\rho) = 0 \Leftrightarrow e^\rho + \rho - 2 = 0 \Leftrightarrow e^\rho = 2 - \rho \overset{0<\rho<1}{\Longleftrightarrow} \rho = \ln(2-\rho) \Leftrightarrow w(\rho) = 0.$$

v) Έχουμε $f''(x) = \begin{cases} (x-1)e^{-x} & , \; x > 0 \\ -2 & , \; x < 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$		$\frown$		$\smile$	

Σ.Κ.
$\left(1, \frac{2}{e}\right)$

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y - \frac{2}{e} = -\frac{1}{e}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{x}{e} + \frac{3}{e}.$$

Η f είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$, άρα

$$f(x) \geq y \quad \text{για κάθε } x \geq 1.$$

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1]$, άρα

$$f(x) \leq y \quad \text{για κάθε } x \leq 1.$$

Επομένως, η εφαπτομένη στο $x = 1$ διαπερνά την C_f.

vi) $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$, οπότε

$$E = \int_0^1 |1 - f(x)|\, dx = \int_0^1 \left(1 - (x+1)e^{-x}\right) dx = \Big[x + (x+2)e^{-x}\Big]_0^1 = 1 + \frac{3}{e} - 2 = \frac{3}{e} - 1.$$

vii) Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\frac{x(x-1)}{e^{x-1}} \leq 2 - ef(x) \leq x - 1, \qquad \forall x \geq 1.$$

Για $x = 1$ ισχύει ως ισότητα, αφού $0 \leq 0 \leq 0$

Για $x > 1$: ΘΜΤ στο $[1, x]$ για την f, άρα υπάρχει $\xi \in (1, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{f(x) - \frac{2}{e}}{x - 1}$$

$$1 < \xi < x \underset{f' \nearrow}{\Longleftrightarrow} f'(x) < f'(\xi) < f'(1) \;\Rightarrow\; -\frac{1}{e} < \frac{f(x) - \frac{2}{e}}{x-1} < -xe^{-x}.$$

$$-\frac{x-1}{e} < f(x) - \frac{2}{e} < -\frac{x(x-1)}{e^x}$$

$$-(x-1) < ef(x) - 2 < -\frac{x(x-1)}{e^{x-1}}$$

$$\frac{x(x-1)}{e^{x-1}} < 2 - ef(x) < x - 1.$$

άρα

$$\frac{x(x-1)}{e^{x-1}} \leq 2 - ef(x) \leq x - 1 \;\; \text{για κάθε } x \geq 1.$$

viii) α′)

$$\lim_{x \to 1} \frac{F(x) - F(0) - \frac{x^2}{2}}{x \ln x - x + 1} = \lim_{x \to 1} \left(F(x) - F(0) - \frac{x^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{x \ln x - x + 1} =$$

$$= \left(F(1) - F(0) - \frac{1}{2}\right) \cdot (+\infty) = \left(\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{2}\right) \cdot (+\infty) = +\infty$$

διότι

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x+1)e^{-x}\,dx =$$

$$\Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x})\,dx = \Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_0^1 - \Big[e^{-x}\Big]_0^1 = 2 - \frac{3}{e}.$$

Άρα

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{e} > 0$$

και

$$\lim_{x\to 1}\big(x\ln x - x + 1\big) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{1}{x\ln x - x + 1} = +\infty$$

διότι

$$\ln x \leq x - 1 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και το } = \text{ για } x = 1$$

άρα

$$\ln\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - x \Leftrightarrow -\ln x \leq \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow x\ln x - x + 1 \geq 0$$

β΄)

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\eta\mu(x-1)}{e\big(F(x) - F(1)\big) + \dfrac{x^2}{2} - 3x + \dfrac{5}{2}} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\sigma\upsilon\nu(x-1)}{ef(x) + x - 3}.$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \sigma\upsilon\nu(x-1) \cdot \frac{1}{ef(x) + x - 3} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty.$$

διότι η f είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$, άρα

$$f(x) \geq -\frac{x}{e} + \frac{3}{e} \Rightarrow ef(x) + x - 3 \geq 0$$

και το = μόνο για $x = 1$.