# Άσκηση 20

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)=1$ και $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(e^x\cdot e^h)-f(e^x)}{h}=2(e^{2x}-1)$.

i ) Να δείξετε ότι $f(x)=x^2-2\ln x\ ,\ x>0$.

ii ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iii ) Να αποδείξετε ότι η ανίσωση $f(x^3+2x+3)\le 1$ έχει ακριβώς μία λύση, έστω $\rho$, που βρίσκεται στο $(-1,0)$.

iv ) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{\rho}^{0}(3x^2+2)f'(x^3+2x+3)f'\big(f(x^3+2x+3)\big)\,dx>0$.

# Λύση

i ) Θέτω $g(x) = f(e^x)$ , $x \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(e^x \cdot e^h) - f(e^x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(e^{x+h}) - f(e^x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

άρα

$$g'(x) = 2(e^{2x} - 1) \Rightarrow f'(e^x)\cdot e^x = 2e^{2x} - 2$$

Θέτω $e^x = u > 0$ οπότε έχουμε

$$f'(u)\cdot u = 2u^2 - 2 \Rightarrow f'(u) = 2u - \frac{2}{u} \Rightarrow f'(u) = \left(u^2 - 2\ln u\right)'$$

άρα από συνέπειες ΘΜΤ $f(u) = u^2 - 2\ln u + c$

Για $u = 1$ προκύπτει $f(1) = 1 - 0 + c \Rightarrow c = 0$

άρα $f(x) = x^2 - 2\ln x$ , $x > 0$

ii ) $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2(x^2-1)}{x}$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $+\infty \searrow$ | | $\nearrow +\infty$ | |

Ο.Ε.
$f(1) = 1$

$f''(x) = 2 + \dfrac{2}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ άρα η $f$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$

Το σύνολο τιμών της $f$ είναι το $f(A) = [1, +\infty)$

iii ) $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$ και το $=$ ισχύει μόνο για $x = 1$ συνεπώς

$$f(x^3 + 2x + 3) \leq 1 \Leftrightarrow x^3 + 2x + 3 = 1 \Leftrightarrow x^3 + 2x + 2 = 0$$

Θέτω $h(x) = x^3 + 2x + 2$ με $h'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ άρα η $h$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Η $h$ είναι συνεχής στο $[-1, 0]$

$h(-1) = -1 < 0$ και $h(0) = 2 > 0$

άρα από θεώρημα Bolzno η $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho \in (-1, 0)$ και $h$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η ρίζα είναι μοναδική.

iv )

$$I = \int_{\rho}^{0} (3x^2+2)f'(x^3+2x+3)f'\big(f(x^3+2x+3)\big)\,dx$$

Θέτω

$$u = f(x^3+2x+3)$$

άρα

$$du = f'(x^3+2x+3)\cdot(x^3+2x+3)'\,dx = (3x^2+2)f'(x^3+2x+3)\,dx$$

Για $x=\rho$: ισχύει $\rho^3+2\rho+2=0 \Leftrightarrow \rho^3+2\rho+3=1$ άρα $u_1 = f(1) = 1$

Για $x=0$: $u_2 = f(3)$

Το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I = \int_{1}^{f(3)} f'(u)\,du = \Big[f(u)\Big]_1^{f(3)} = f(f(3)) - f(1)$$

Η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και

$$1<3 \Leftrightarrow f(1)<f(3) \Leftrightarrow 1<f(3) \Leftrightarrow f(1)<f(f(3))$$

Επομένως $I = f(f(3)) - f(1) > 0$