

Άσκηση 21

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 4e^{x-\alpha}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- i) Να δείξετε ότι το σημείο καμπής της συνάρτησης f για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α ανήκει στην παραβολή $g(x) = 2x^2 - 4$, $x \in \mathbb{R}$.
- ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της g που διέρχονται από το σημείο $M(0, -6)$.
- iii) Έστω $\varepsilon_1 : y = 4x - 6$ και $\varepsilon_2 : y = -4x - 6$ οι εφαπτόμενες της C_g . Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g και τις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.
- iv) Έστω $x_0 = 2$ η τετμημένη του σημείου καμπής.
 - α') Να δείξετε ότι $\alpha = 2$.
 - β') Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$.

Λύση

i) Έχουμε $f(x) = 2x^2 - 4e^{x-\alpha} \Rightarrow$

$$f'(x) = 4x - 4e^{x-\alpha} \text{ και } f''(x) = 4 - 4e^{x-\alpha}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4 = 4e^{x-\alpha} \Leftrightarrow e^{x-\alpha} = 1 \Leftrightarrow x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = \alpha.$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f''	+	0	-
f			
ΣΚ			

Το σημείο καμπής είναι το $A(\alpha, f(\alpha)) = (\alpha, 2\alpha^2 - 4)$

Θέτω $x = \alpha$ και $y = 2\alpha^2 - 4$, οπότε $y = 2x^2 - 4$ άρα το σημείο καμπής ανήκει στην παραβολή $g(x) = 2x^2 - 4$

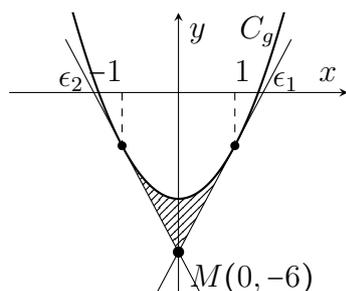
ii) Έστω $(x_0, g(x_0))$ το σημείο επαφής.

Η εφαπτομένη είναι $y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \xrightarrow{M(0,-6)}$

$$-6 - 2x_0^2 + 4 = -4x_0^2 \Leftrightarrow 2x_0^2 = 2 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$$

Για $x_0 = 1$: $\varepsilon_1 : y = 4x - 6$

Για $x_0 = -1$: $\varepsilon_2 : y = -4x - 6$



iii)

$$\begin{aligned} E &= \int_{-1}^0 (g(x) - \varepsilon_2) dx + \int_0^1 (g(x) - \varepsilon_1) dx = \\ &= \int_{-1}^0 (2x^2 + 4x + 2) dx + \int_0^1 (2x^2 - 4x + 2) dx = \\ &= \left[\frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 2x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 2x \right]_0^1 = \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

iv) α) Αφού $x_0 = 2$ τότε $\alpha = 2$

β') Για $\alpha = 2$ είναι $f(x) = 2x^2 - 4e^{x-2}$ και $g(x) = 2x^2 - 4$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_1^3 |f(x) - g(x)| dx = \int_1^3 |(2x^2 - 4e^{x-2}) - (2x^2 - 4)| dx = \int_1^3 |-4e^{x-2} + 4| dx =$$

$$4 \int_1^3 |1 - e^{x-2}| dx = 4 \int_1^2 (1 - e^{x-2}) dx + 4 \int_2^3 (e^{x-2} - 1) dx =$$
$$4 [x - e^{x-2}]_1^2 + 4 [e^{x-2} - x]_2^3 = 4(e + \frac{1}{e} - 2)$$