Άσκηση 22

Έστω συνάρτηση : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει $f(3) = f(2) + 5$, $f(1) = 1 + f(0)$ και $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(2-x)}{x^2 - 3x + 2} = -4$.

i) Να δείξετε ότι $f'(1) = 2$.

ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 3x^2 - 14$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $x_0 \in (2, 3)$.

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 3x^2 - 2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 3)$.

iv) Να δείξετε ότι $\int\limits_0^1 x f''(x) = 1$.

Λύση

i)

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(2-x)}{x^2-3x+2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{f'(x)+f'(2-x)}{2x-3} \overset{f' \ \sigma\upsilon\nu}{=} \frac{f'(1)+f'(1)}{2-3} = -4 \Rightarrow f'(1) = 2$$

ii) Θέτω $g(x) = f(x) - x^3 + 14x$

Η g είναι συνεχής στο $[2,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,3)$ με $g'(x) = f'(x) - 3x^2 + 14$

- $g(2) = f(2) + 20 = f(3) - 5 + 20 = f(3) + 15$
- $g(3) = f(3) + 15$

άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0 \Rightarrow$ $f'(x_0) - 3x_0^2 + 14 = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 3x_0^2 - 14$

iii) Θέτω $h(x) = f'(x) - 3x^2 + 2$

Η h είναι συνεχής στο $[1, x_0]$

- $h(1) = f'(1) - 3 + 2 = 1 > 0$
- $h(x_0) = f'(x_0) - 3x_0^2 + 2 = 3x_0^2 - 14 - 3x_0^2 + 2 = -12 < 0$

άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, x_0) \subset (1,3)$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) - 3\xi^2 + 2 = 0 \Rightarrow f'(\xi) = 3\xi^2 - 2$$

iv)

$$\int_0^1 x f''(x)\,dx = \Big[x f'(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 f'(x)\,dx =$$

$$f'(1) - \Big[f(x)\Big]_0^1 = f'(1) - (f(1) - f(0)) = 2 - 1 = 1$$