# Άσκηση 23

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$ , $x \in \mathbb{R}$ και το σημείο $M(2,\kappa)$ , $\kappa \in \mathbb{R}$.

i ) Να βρείτε το $\kappa$ ώστε το σημείο $M$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της $f$.

ii ) Αν $\kappa \neq 7$, να βρεθούν οι τιμές του $\kappa$ ώστε από το σημείο $M$ να διέρχονται δύο εφαπτόμενες της $C_f$ κάθετες μεταξύ τους.

iii ) Αν $\kappa = 7$, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$, την εφαπτομένη στο $M$ και την ευθεία $x = 1$.

# Λύση

i ) Για να ανήκει το $M(2,\kappa)$ στην $C_f$ πρέπει $f(2)=\kappa \Rightarrow \kappa = 7$

ii ) Έστω $A(x_0, f(x_0))$ σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη στο $A$ έχει εξίσωση

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - (x_0^2 + x_0 + 1) = (2x_0 + 1)(x - x_0) \overset{M(2,\kappa)}{\Rightarrow}$$

$$\kappa - x_0^2 - x_0 - 1 = (2x_0 + 1)(2 - x_0) \Rightarrow \kappa - x_0^2 - x_0 - 1 = 4x_0 - 2x_0^2 + 2 - x_0 \Rightarrow x_0^2 - 4x_0 + (\kappa - 3) = 0 \quad (1)$$

Οι κλίσεις των δύο εφαπτομένων είναι $\lambda_1 = f'(x_1) = 2x_1 + 1$ και $\lambda_2 = f'(x_2) = 2x_2 + 1$, όπου $x_1, x_2$ οι ρίζες της (1)

Πρέπει $\Delta > 0$ και $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

$$\Delta > 0 \Rightarrow 16 - 4(\kappa - 3) > 0 \Leftrightarrow 4(\kappa - 3) < 16 \Leftrightarrow \kappa < 7$$

και

$$(2x_1 + 1)(2x_2 + 1) = -1 \Rightarrow 4x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 1 = -1$$

με $x_1 + x_2 = S = 4$ και $x_1x_2 = P = \kappa - 3$

$$4(\kappa - 3) + 2 \cdot 4 + 1 = -1 \Rightarrow 4\kappa - 12 + 8 + 1 = -1 \Rightarrow 4\kappa = 2 \Rightarrow \kappa = \frac{1}{2}$$

iii ) Η εφαπτομένη στο $M(2,7)$ έχει εξίσωση

$$y - 7 = 5(x - 2) \Rightarrow y = 5x - 3$$

$$E = \int_1^2 |f(x) - (5x - 3)|\, dx = \int_1^2 (x^2 + x + 1 - 5x + 3)\, dx =$$

$$\int_1^2 (x - 2)^2\, dx = \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^2 = 0 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$