

## Άσκηση 24

Δίνεται η συνάρτηση  $(f \circ g)(x) = x^2 - x - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και η συνάρτηση  $g(x) = x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

i) Να βρείτε τη συνάρτηση  $f$ .

Έστω  $f(x) = x^2 + x - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

ii) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\eta\mu(x-1)}$ .

iii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $f \circ g$  και τις ευθείες  $x = -1$ ,  $x = 1$ .

## Λύση

i) Θέτω

$$u = g(x) \Rightarrow u = x - 1, \quad u \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = u + 1$$

οπότε

$$(f \circ g)(x) = x^2 - x - 2 \Rightarrow f(u) = (u+1)^2 - (u+1) - 2 = u^2 + 2u + 1 - u - 1 - 2 = u^2 + u - 2, \quad u \in \mathbb{R}$$

Επομένως

$$f(x) = x^2 + x - 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ (x+2) \cdot \frac{x-1}{x-1} \right] = 3$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x-1} \stackrel{u=x-1}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g(u)}{u} = 1$$

iii)

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_{-1}^1 |f(x) - (f \circ g)(x)| dx = \int_{-1}^1 |2x| dx \\ &= \int_{-1}^0 (-2x) dx + \int_0^1 2x dx = [-x^2]_{-1}^0 + [x^2]_0^1 = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$