Άσκηση 25

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^4 + x^2 + \alpha & , \ x \in [-1, 0] \\ x^3 + \beta x^2 & , \ x \in (0, 1] \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τα α, β ώστε η f να ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$.

Έστω $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

i) Να υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$, $x = 1$.

Λύση

i) Για να ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[-1,1]$, πρέπει:

- Η f να είναι συνεχής στο $[-1,1]$.

  Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[-1,0)$ και $(0,1]$ ως πολυωνυμική.

  Για να είναι συνεχής στο $x=0$, πρέπει:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \alpha = 0$$

- Η f να είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$

  Η f είναι παραγωγίσιμη στα $(-1,0)$ και $(0,1)$ ως πολυωνυμική.

  Για $x=0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^4+x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} (x^3+x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3+\beta x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} (x^2+\beta x) = 0$$

  Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ για κάθε $\beta \in \mathbb{R}$.

- Να ισχύει $f(-1) = f(1)$:

$$f(-1) = f(1) \Rightarrow 1+1+0 = 1+\beta \Leftrightarrow \beta = 1$$

Επομένως, $\alpha = 0$ και $\beta = 1$.

ii) Είναι $f(x) = \begin{cases} x^4+x^2 & , \ x \in [-1,0] \\ x^3+x^2 & , \ x \in (0,1] \end{cases}$

$x^4+x^2 = x^2(x^2+1) \geq 0$ και $x^3+x^2 = x^2(x+1) \geq 0$ για κάθε $x \in [-1,1]$

$$E(\Omega) = \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx = \int_{-1}^{0} (x^4+x^2)\, dx + \int_{0}^{1} (x^3+x^2)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3} = \frac{67}{60}$$