Άσκηση 26

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f(0) = -1$ και $f'(x) + f(x) = -\dfrac{2}{e^x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{2x+1}$, $x \neq \dfrac{1}{2}$.

i) Να δείξετε ότι $f(x) = -\dfrac{2x+1}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και την ευθεία $x = 1$

Λύση

i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f'(x) + f(x) = -\frac{2}{e^x} \Leftrightarrow e^x f'(x) + e^x f(x) = -2 \Leftrightarrow (e^x f(x))' = (-2x)'$$

άρα από συνέπειες ΘΜΤ

$$e^x f(x) = -2x + c$$

και για $x = 0$ προκύπτει

$$f(0) = c \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow c = -1$$

άρα

$$e^x f(x) = -2x - 1 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{2x+1}{e^x} \ , \ x \in \mathbb{R}$$

ii) $f(x) = -\dfrac{2x+1}{e^x} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{2e^x - (2x+1)e^x}{e^{2x}} = -\dfrac{e^x(2-2x-1)}{e^{2x}} = \dfrac{2x-1}{e^x}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$

ολικό ελάχιστο για $x = \dfrac{1}{2}$ το $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{2}{\sqrt{e}}$

iii)

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{f(x)}{2x+1} \Leftrightarrow f(x)\left(1 - \frac{1}{2x+1}\right) = 0 \Leftrightarrow f(x)\frac{2x}{2x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$E(\Omega) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx = \int_0^1 \left| f(x) - \frac{f(x)}{2x+1} \right| dx =$$

$$\int_0^1 \left| \frac{2x+1}{e^x} \left(\frac{2x}{2x+1} \right) \right| dx = \int_0^1 2xe^{-x}\, dx =$$

$$\int_0^1 -2x\,(e^{-x})'\, dx = \left[-2xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -2e^{-x}\, dx =$$

$$-2e^{-1} - \left[2e^{-x}\right]_0^1 = 2\left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1\right) = 2 - \frac{4}{e}$$