Άσκηση 27

Δίνεται συνάρτηση $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει

$$f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2}\ ,\ \ x > -1.$$

Η κλίση της C_f στο σημείο $A(0,2)$ είναι -1.

i) Να δείξετε ότι $f(x) = e^x - \ln(x+1) - x + 1\ ,\ x > -1$.

ii) Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο σε σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

iii) Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{e^x - x - 1}{f'(x)}$.

Λύση

i) Για κάθε $x > -1$ έχουμε $f''(x) = e^x + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \left(e^x - \dfrac{1}{x+1}\right)'$

άρα από συνέπειες ΘΜΤ $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x+1} + c_1$

$f'(0) = -1 \Rightarrow 1 - 1 + c_1 = -1 \Rightarrow c_1 = -1$

$f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x+1} - 1 = (e^x - \ln(x+1) - x)'$

άρα από συνέπειες ΘΜΤ $f(x) = e^x - \ln(x+1) - x + c_2$

$f(0) = 2 \Rightarrow 1 + c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = 1$

άρα $f(x) = e^x - \ln(x+1) - x + 1\ ,\ x > -1$

ii) f' συνεχής στο $[0,1]$ και $f'(0) = -1 < 0$ και $f'(1) = e - \dfrac{3}{2} > 0$ άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1) : f'(x_0) = 0$

$f''(x) > 0$ για κάθε $x > -1$ άρα f' γνησίως αύξουσα, οπότε x_0 μοναδική ρίζα

x	-1		x_0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

O.E.

iii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x + 1 \Rightarrow e^x - x - 1 \geq 0$ και το $=$ μόνο για $x = 0$

Επειδή $x_0 \in (0,1)$ τότε $e^{x_0} - x_0 - 1 > 0$

f' γνησίως αύξουσα άρα

για $x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0$, οπότε

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{e^x - x - 1}{f'(x)} = \lim_{x \to x_0^-} (e^x - x - 1) \cdot \frac{1}{f'(x)} = (e^{x_0} - x_0 - 1) \cdot (-\infty) = -\infty$$

για $x > x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$, οπότε

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{e^x - x - 1}{f'(x)} = \lim_{x \to x_0^+} (e^x - x - 1) \cdot \frac{1}{f'(x)} = (e^{x_0} - x_0 - 1) \cdot (+\infty) = +\infty$$

άρα το $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{e^x - x - 1}{f'(x)}$ δεν υπάρχει