Άσκηση 28

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2+9}}$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1}.

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{4x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f και $C_{f^{-1}}$.

Λύση

i)

$$f'(x) = \frac{4\sqrt{x^2+9} - 4x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} = \frac{4(x^2+9)-4x^2}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}} = \frac{36}{\sqrt{x^2+9}^3} > 0$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα $1-1$ οπότε αντιστρέφεται

$D_{f^{-1}} f(A) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-4,4)$ διότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+9}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{9}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x\sqrt{1+\dfrac{9}{x^2}}} = \frac{4}{\sqrt{1}} = 4$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+9}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{9}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{-x\sqrt{1+\dfrac{9}{x^2}}} = \frac{4}{-1} = -4$$

Θέτω

$$y = f(x) \Rightarrow y = \frac{4x}{\sqrt{x^2+9}} \Rightarrow y^2 = \frac{16x^2}{x^2+9} \Rightarrow y^2x^2 + 9y^2 = 16x^2 \Rightarrow$$

$$x^2(16-y^2) = 9y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{9y^2}{16-y^2}$$

Επειδή $y = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2+9}}$ έχουμε ότι x, y ομόσημοι, άρα $x = \dfrac{3y}{\sqrt{16-y^2}}$

οπότε $f^{-1}(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{16-x^2}},\ x \in (-4,4)$.

ii) <u>α′ τρόπος</u>

Θέτω $u = x^2+9 \Rightarrow du = 2x\,dx$

για $x=-2\ :\ u = (-2)^2+9 = 13$ και για $x = 2\ :\ u = 2^2+9 = 13$

$$I = \int_{13}^{13}\frac{2}{\sqrt{u}}\,du = \left[4\sqrt{u}\right]_{13}^{13} = 4\sqrt{13} - 4\sqrt{13} = 0$$

<u>β′ τρόπος</u> Η f είναι περιττή αφού για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ και

$$f(-x) = \frac{4(-x)}{\sqrt{(-x)^2+9}} = -\frac{4x}{\sqrt{x^2+9}} = -f(x)$$

$$I = \int_{-2}^{2}\frac{4x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx$$

Στο $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$, θέτω $x = -u \Rightarrow dx = -du$

$$\int_2^0 f(-u)(-du) = \int_2^0 (-f(u))(-du) = \int_2^0 f(u)\,du = -\int_0^2 f(x)\,dx$$

Άρα

$$I = -\int_0^2 f(x)\,dx + \int_0^2 f(x)\,dx = 0$$

iii) Λόγω συμμετρίας ως προς την $y = x$ είναι $E(\Omega) = 2\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} |f(x) - x|\,dx$

$f(x) = x \Rightarrow x = 0$, $x = \pm\sqrt{7}$

Στο $[-\sqrt{7}, 0]$ ισχύει $x \geq f(x)$ και στο $[0, \sqrt{7}]$ ισχύει $f(x) \geq x$

$$E(\Omega) = 2\left(\int_{-\sqrt{7}}^{0} (x - f(x))\,dx + \int_0^{\sqrt{7}} (f(x) - x)\,dx\right)$$

$$I_1 = \int_{-\sqrt{7}}^{0}\left(x - \frac{4x}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - 4\sqrt{x^2+9}\right]_{-\sqrt{7}}^{0} = -12 - \frac{7}{2} + 16 = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \int_0^{\sqrt{7}}\left(\frac{4x}{\sqrt{x^2+9}} - x\right) = \left[4\sqrt{x^2+9} - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{7}} = 16 - \frac{7}{2} - 12 = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E(\Omega) = 2\,(I_1 + I_2) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2$$