

Άσκηση 29

Δίνεται συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)e^{f(x)} = x$ για κάθε $x \geq 0$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1} .

Έστω $f^{-1}(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f^{-1}(x) dx$.

iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^e f(x) dx$.

iv) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\ln x}$.

Λύση

i) $f(x)e^{f(x)} = x, x \geq 0$

Έστω $x_1, x_2 \geq 0$ με $f(x_1) = f(x_2)$ (1) $\Rightarrow e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)}$ (2)

Πολλαπλασιάζω (1) και (2) άρα

$$f(x_1)e^{f(x_1)} = f(x_2)e^{f(x_2)} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Θέτω στην αρχική σχέση $f(x) = y$ οπότε προκύπτει

$$ye^y = x \Rightarrow f^{-1}(y) = ye^y, y \in \mathbb{R}$$

Επομένως,

$$f^{-1}(x) = xe^x, x \in \mathbb{R}$$

ii)

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^{-1}(x) dx &= \int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x(e^x)' dx = \\ [xe^x]_0^1 - \int_0^1 (x)'e^x dx &= e - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - e + 1 = 1 \end{aligned}$$

iii) Θέτω $x = f^{-1}(u) \Rightarrow dx = (f^{-1})'(u) du$

για $x = 0 \Rightarrow ue^u = 0 \Rightarrow u = 0$

για $x = e \Rightarrow ue^u = e \Rightarrow u = 1$

$$\begin{aligned} \int_0^e f(x) dx &= \int_0^1 u \cdot e^u(u+1) du = \int_0^1 (u^2 + u)e^u du = \\ \int_0^1 (u^2 + u)(e^u)' du &= [(u^2 + u)e^u]_0^1 - \int_0^1 (2u + 1)e^u du = \\ 2e - [(2u + 1)e^u]_0^1 + \int_0^1 2e^u du &= 2e - 3e + 1 + [2e^u]_0^1 = -e + 1 + 2e - 2 = e - 1 \end{aligned}$$

iv) Από τη σχέση $f(x)e^{f(x)} = x$ αφού $x \geq 0$ τότε $f(x) \geq 0$ και το = για $x = 0$

και παραγωγίζοντας έχουμε

$$f'(x)e^{f(x)} + f(x)e^{f(x)}f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x)e^{f(x)}(1 + f(x)) = 1 \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}(1 + f(x))} > 0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \Rightarrow \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = \mathbb{R} \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Θέτω $u = f(x)$, οπότε $x = f^{-1}(u)$. Όταν $x \rightarrow +\infty$ τότε $f^{-1}(u) \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{\ln(ue^u)} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{\ln u + u} \stackrel{DLH}{=} 1$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{u} + u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{1 + u} = 1$$