Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + 4$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(x) \geq \alpha + 6$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

i) Να βρείτε το α.

Έστω $\alpha = -3$

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) α΄) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{17}{4}$ είναι η εφαπτομένη της C_f με την μικρότερη κλίση, που διαπερνά τη γραφική παράσταση της f.

β΄) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{x - \eta\mu x}{\left(e^{x-\frac{1}{2}} - 1\right)(4f(x) + 6x - 17)}$.

iv) Να δείξετε ότι $e^{f(x)-4} \leq f(x) - 3 + \dfrac{1}{2}(f(x) - 4)^2$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$.

v) Να αποδείξετε ότι $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(\eta\mu x)dx < \dfrac{17\pi + 12}{8}$.

Λύση

i) Είναι $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + 4$ και $f'(x) = 6x^2 + 2\alpha x$. Ισχύει $f(x) \geq \alpha + 6$ για κάθε $x > 0$ δηλαδή

$$f(x) \geq f(1) \text{για κάθε} x > 0.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και το 1 είναι εσωτερικό σημείο, άρα από Θ. Fermat

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -3.$$

ii) Για $\alpha = -3$ έχουμε

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$ και $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	

T.M. $f(0) = 4$ T.E. $f(1) = 3$

iii) α΄) $f'(x) = 6x(x-1)$ και $f''(x) = 12x - 6 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	

O.E. $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$

Η εφαπτομένη στο $x = \dfrac{1}{2}$ είναι

$$y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y - \frac{7}{2} = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{4}.$$

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, \dfrac{1}{2}]$ και κυρτή στο $[\dfrac{1}{2}, +\infty)$, άρα το σημείο

$$\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

είναι σημείο καμπής, οπότε η εφαπτομένη στο σημείο αυτό διαπερνά τη C_f.

β΄)

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{x-\eta\mu x}{(e^{x-\frac{1}{2}}-1)(4f(x)+6x-17)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}}(x-\eta\mu x)\frac{1}{(e^{x-\frac{1}{2}}-1)(4f(x)+6x-17)} =$$

$$\left(\frac{1}{2}-\eta\mu\frac{1}{2}\right)\cdot(+\infty)=+\infty$$

αφού $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το $=$ μόνο για $x=0$

άρα για $x>0$ ισχύει $\eta\mu x < x$, οπότε $\dfrac{1}{2}-\eta\mu\dfrac{1}{2}>0$ και

για $x<\dfrac{1}{2}$:

$$e^{x-\frac{1}{2}}-1<0$$

και επειδή η f είναι κοίλη,

$$f(x)<-\frac{3}{2}x+\frac{17}{4} \Rightarrow 4f(x)+6x-17<0$$

Άρα

$$(e^{x-\frac{1}{2}}-1)(4f(x)+6x-17)>0$$

Για $x>\dfrac{1}{2}$:

$$e^{x-\frac{1}{2}}-1>0$$

και επειδή η f είναι κυρτή,

$$f(x)>-\frac{3}{2}x+\frac{17}{4} \Rightarrow 4f(x)+6x-17>0$$

Άρα

$$(e^{x-\frac{1}{2}}-1)(4f(x)+6x-17)>0 \text{ για κάθε } x\neq\frac{1}{2}$$

iv) Στο $(-\infty,1)$ η f παρουσιάζει Ο.Ε. στο $x=1$ με $f(1)=4$, άρα $f(x)\le 4$ για κάθε $x<1$.

Θέτουμε $u=f(x)-4$ οπότε $u\le 0$. Θέλουμε να δείξουμε

$$e^u \le 1+u+\frac{u^2}{2}.$$

Θέτουμε $w(u)=e^u-u-1-\frac{u^2}{2} \Rightarrow w'(u)=e^u-1-u\ge 0$ και το $=$ μόνο για $u=0$

u	$-\infty$	0	$+\infty$
$w'(u)$	$+$	0	$+$
$w(u)$	$\nearrow$		$\nearrow$

Άρα για $u \le 0 \;\Leftrightarrow w(u) \le w(0) = 0$

v) Η f είναι κοίλη στο $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, άρα $f(x) \le -\frac{3}{2}x + \frac{17}{4}$ για κάθε $x < \frac{1}{2}$

Για $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ ισχύει

$$\eta\mu x \le 0 < \frac{1}{2}$$

άρα

$$f(\eta\mu x) \le -\frac{3}{2}\,\eta\mu x + \frac{17}{4}.$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(\eta\mu x)\,dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(-\frac{3}{2}\,\eta\mu x + \frac{17}{4}\right) dx = \left[\frac{3}{2}\sigma\upsilon\nu x + \frac{17}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{3}{2} + \frac{17\pi}{8} = \frac{17\pi + 12}{8}.$$

Άρα

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(\eta\mu x)\,dx < \frac{17\pi + 12}{8}.$$