

Άσκηση 30

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$ και $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

i) Να βρείτε τη συνάρτηση $K(x) = g \circ f$.

Έστω $K(x) = \ln \sqrt{x-1}$, $x > 1$.

ii) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις K και h είναι ίσες, όπου $h(x) = \frac{1}{2} \ln |x-1|$. Αν $K \neq h$, να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο ώστε $K = h$.

iii) Να αποδείξετε ότι η K είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η K^{-1} .

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_2^{e+1} K(x) dx = \frac{1}{2}$.

Λύση

$$\text{i) } D_K = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq 1 \mid \sqrt{x-1} > 0\} = \{x \geq 1 \mid x \neq 1\} = (1, +\infty)$$

$$K(x) = g(f(x)) = \ln \sqrt{x-1}$$

$$\text{ii) } D_h = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \neq D_K, \text{ \acute{a}\rho\alpha } K \neq h$$

$$\text{\gamma\iota\alpha } x > 1 \text{ \acute{e}\chi\omicron\upsilon\mu\epsilon } h(x) = \frac{1}{2} \ln(x-1) = \ln(x-1)^{1/2} = \ln \sqrt{x-1} = K(x)$$

$$\text{\acute{a}\rho\alpha } K = h \text{ \sigma\tau\omicron } (1, +\infty)$$

$$\text{iii) } K'(x) = \left(\frac{1}{2} \ln(x-1)\right)' = \frac{1}{2(x-1)} > 0 \text{ \sigma\tau\omicron } (1, +\infty)$$

\acute{a}\rho\alpha \eta K \text{ \acute{e}\i\text{n}\alpha\i\text{i} \gamma\text{n}\eta\sigma\i\text{i}\omega\varsigma \acute{\alpha}\upsilon\zeta\omicron\upsilon\sigma\alpha \text{ \sigma\tau\omicron } (1, +\infty) \acute{\alpha}\rho\alpha 1-1 \text{ \kappa}\alpha\i\text{i} \text{ \acute{\alpha}\nu\text{t}\i\text{s}\text{t}\rho\acute{\epsilon}\phi\epsilon\tau\alpha\i}

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omega y = \ln \sqrt{x-1} \Leftrightarrow e^y = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow e^{2y} = x-1 \Leftrightarrow x = e^{2y} + 1$$

$$\text{\acute{a}\rho\alpha } K^{-1}(x) = e^{2x} + 1, x \in \mathbb{R}.$$

iv)

$$\begin{aligned} \int_2^{e+1} K(x) dx &= \int_2^{e+1} \frac{1}{2} \ln(x-1) dx = \frac{1}{2} \int_2^{e+1} (x-1)' \ln(x-1) dx = \\ &= \frac{1}{2} [(x-1) \ln(x-1)]_2^{e+1} - \frac{1}{2} \int_2^{e+1} (x-1) \frac{1}{x-1} dx = \\ &= \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} \int_2^{e+1} 1 dx = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} [x]_2^{e+1} = \frac{e}{2} - \frac{e-1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$