Άσκηση 31

Δίνεται η συνάρτηση $f(e^x - 1) = e^{x+1} - x - e$, $x \in [0, +\infty)$.

i) Να δείξετε ότι $f(x) = ex - \ln(x+1)$, $x \in [0, +\infty)$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

iv) Να αποδείξετε ότι $f'(x) + f'(2x) \geq f'(3x) + e - 1$ για κάθε $x \geq 0$.

Λύση

i) Θέτω $u = e^x - 1 \geq 0$ αφού $x \geq 0$ οπότε $e^x = u + 1 \Rightarrow x = \ln(u+1)$

$f(x) = e \cdot e^x - x - e = e(u+1) - \ln(u+1) - e = eu - \ln(u+1)$

Άρα $f(x) = ex - \ln(x+1)$, $x \geq 0$

ii) $f'(x) = e - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{e(x+1)-1}{x+1} = \dfrac{ex+e-1}{x+1} > 0$ για κάθε $x \geq 0$

$f''(x) = (e - (x+1)^{-1})' = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$ άρα f κυρτή στο $[0, +\infty)$

x	0	$+\infty$
f'	$+$	
f	$\nearrow$	$+\infty$

ΟΕ
$f(0) = 0$

$f(A) = [f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) = [0, +\infty)$

iii) $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$ άρα

$$E(\Omega) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (ex - \ln(x+1))dx = \left[\frac{ex^2}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 (x+1)'\ln(x+1)dx =$$

$$\frac{e}{2} - \Big[(x+1)\ln(x+1)\Big]_0^1 + \int_0^1 1dx = \frac{e}{2} - 2\ln 2 + \Big[x\Big]_0^1 = \frac{e+2-4\ln 2}{2}$$

iv) Για $x = 0$ η σχέση ισχύει ως ισότητα $f'(0) + f'(0) = f'(0) + e - 1 \Leftrightarrow e - 1 = e - 1$

Για $x > 0$ εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την f' στο $[0, x]$ και στο $[2x, 3x]$:

- Η f' είναι συνεχής στο $[0, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$, άρα υπάρχει $\xi_1 \in (0, x)$ τέτοιο ώστε:
$$f'(\xi_1) = \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{f'(x) - (e-1)}{x}$$

- Η f' είναι συνεχής στο $[2x, 3x]$ και παραγωγίσιμη στο $(2x, 3x)$, άρα υπάρχει $\xi_2 \in (2x, 3x)$ τέτοιο ώστε:
$$f''(\xi_2) = \frac{f'(3x) - f'(2x)}{3x - 2x} = \frac{f'(3x) - f'(2x)}{x}$$

$f''(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'''(x) = -\dfrac{2}{(x+1)^3} < 0$ για κάθε $x \geq 0$

άρα η f'' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f''(\xi_1) > f''(\xi_2) \Rightarrow \frac{f'(x)-(e-1)}{x} > \frac{f'(3x)-f'(2x)}{x}$$

$$f'(x) - e + 1 > f'(3x) - f'(2x) \Rightarrow f'(x) + f'(2x) > f'(3x) + e - 1$$

Άρα για κάθε $x \geq 0$ ισχύει $f'(x) + f'(2x) \geq f'(3x) + e - 1$