Άσκηση 32

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{g(\alpha)}{x^2 + g^2(\alpha)}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $\dfrac{g'(x)}{g(x)} = \dfrac{2}{x}$ για κάθε $x > 0$ με $g(1) = 1$. Η f παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ τοπικό ακρότατο το 1.

i) Να δείξετε ότι $g(x) = x^2$, $x > 0$.

ii) Να βρείτε τις τιμές του α.

Έστω $\alpha = 1$

iii) Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1 και στη συνέχεια να βρείτε τη συνάρτηση $h = f \circ g^{-1}$.

Δίνεται $h(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $x > 0$

iv) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_h, την εφαπτομένη στο σημείο $M\,(1, h(1))$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 4$.

v) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}x \cdot h\left((\text{συν}x)^2 + 2\right) dx$.

Λύση

i)

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2}{x} \Rightarrow (\ln|g(x)|)' = (2\ln x)' \Rightarrow \ln|g(x)| = 2\ln x + c$$

για $x = 1$ έχουμε

$$\ln|g(1)| = 2\ln 1 + c \Rightarrow c = 0$$

άρα $\ln|g(x)| = \ln x^2 \Rightarrow |g(x)| = x^2 > 0$ για κάθε $x > 0$

άρα $g(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και συνεχής στο $(0, +\infty)$

άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο και $g(1) = 1 > 0$ άρα $g(x) > 0$ για κάθε $x > 0$

οπότε $g(x) = x^2$, $x > 0$

ii) Για $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{g(\alpha)}{x^2 + g^2(\alpha)} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x \cdot g(\alpha)}{(x^2 + g^2(\alpha))^2}$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{g(\alpha)} = 1 \Rightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1$$

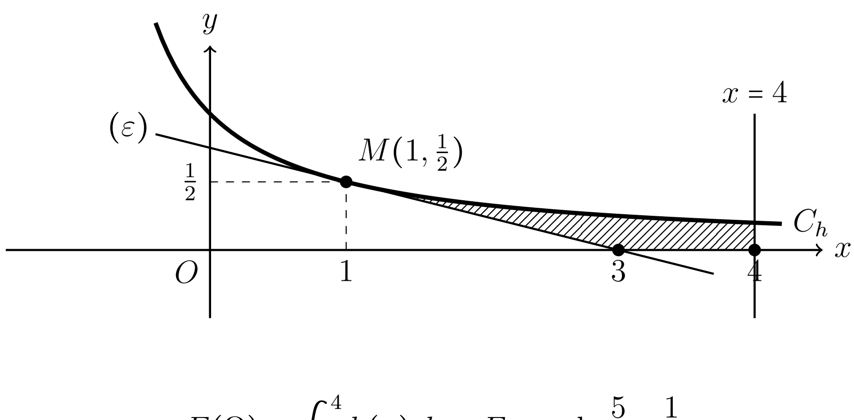
iii) $g'(x) = 2x > 0$ για $x > 0$ άρα g γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ άρα 1-1 και αντιστρέφεται

Θέτω $y = x^2 \underset{y>0}{\overset{x>0 \Rightarrow x^2>0}{\Longleftrightarrow}} x = \sqrt{y}$ οπότε $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$

$$D_h = \{x \in D_{g^{-1}} \mid g^{-1}(x) \in D_f\} = \{x > 0 \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$$

$$h(x) = f(g^{-1}(x)) = \frac{g(1)}{(\sqrt{x})^2 + g^2(1)} = \frac{1}{x+1} \ , \ x > 0$$

iv) Η εφαπτομένη στο $M(1, h(1))$ είναι $(\varepsilon): y - h(1) = h'(1)(x-1) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$



$$E(\Omega) = \int_1^4 h(x)\,dx - E_{\text{τριγ}} = \ln\frac{5}{2} - \frac{1}{2}$$

αφού

$$E_{\tau\rho\iota\gamma} = \frac{1}{2} \cdot (3-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x+1}\,dx = \Big[\ln(x+1)\Big]_1^4 = \ln 5 - \ln 2 = \ln\frac{5}{2}$$

v)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \cdot h(\sigma\upsilon\nu^2 x + 2)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{1}{(\sigma\upsilon\nu^2 x + 2) + 1}\,dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{3 + (1 - \eta\mu^2 x)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{4 - \eta\mu^2 x}\,dx$$

Θέτω $u = \eta\mu x$ οπότε $du = \sigma\upsilon\nu x\,dx$

για $x = 0 \Rightarrow u = 0$ και για $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{4-u^2}\,du = \int_0^1 \frac{1}{(2-u)(2+u)}\,du =$$

$$\frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{1}{2-u} + \frac{1}{2+u}\right) du = \frac{1}{4}\Big[-\ln|2-u| + \ln|2+u|\Big]_0^1 =$$

$$\frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{2+u}{2-u}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{4}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{\ln 3}{4}$$