Άσκηση 33

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = (e^x - 1)^2 - x^2 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$ και F μία αρχική της f με $F(0) = -\frac{3}{2}$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να δείξετε ότι $2F(x) + 3 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον δίνεται συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και κυρτή για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x^2) - 1}{x^2} = 1$.

iii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο σημείο $M\,(0, g(0))$.

iv) Να βρείτε τα όρια:

α΄) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{G(x) - G(0) - \frac{x^2}{2} - x}$, όπου G μία αρχική της g.

β΄) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{g(x^2) + \text{συν}^2 x - 2}{x^2 - x} \cdot \ln x \right)$.

v) Να λυθεί η εξίσωση $f\left((e^x - 1)^2\right) - g'(x^2 - 2x) = f(x^2 - 2x) - g'\left((e^x - 1)^2\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

i) $f(x) = (e^x - 1)^2 - x^2 + 2x$

$f'(x) = 2(e^x - 1)e^x - 2x + 2 = 2e^{2x} - 2e^x - 2x + 2$

$f''(x) = 4e^{2x} - 2e^x - 2 = 2(2e^{2x} - e^x - 1)$

$f''(x) = 0 \overset{u = e^x > 0}{\Rightarrow} 2u^2 - u - 1 = 0 \Rightarrow u = 1$ ή $u = -1/2$ (απορ.) $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f'	$\searrow$		$\nearrow$

OE
$f'(0) = 2$

$f'(x) \geq f'(0) = 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) F αρχική της $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$

αφού f γνησίως αύξουσα, τότε

για $x < 0 \Rightarrow f(x) < f(0) = 0 \Rightarrow F'(x) < 0$

για $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow F'(x) > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
F'	$-$	0	$+$
F	$\searrow$		$\nearrow$

OE
$F(0) = -\dfrac{3}{2}$

$F(x) \geq F(0) \Rightarrow 2F(x) + 3 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το = μόνο για $x = 0$

iii) $\lim_{x \to 0} \dfrac{g(x^2) - 1}{x^2} = 1 \overset{u = x^2}{\Rightarrow} \lim_{u \to 0^+} \dfrac{g(u) - 1}{u} = 1$

Θέτω $w(u) = \dfrac{g(u) - 1}{u} \Rightarrow g(u) = u \cdot w(u) + 1$

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη, είναι και συνεχής στο 0 άρα

$$g(0) = \lim_{u \to 0^+} g(u) = \lim_{u \to 0^+} u \cdot w(u) + 1 = 1$$

και

$$g'(0) = \lim_{u\to 0}\frac{g(u)-g(0)}{u-0} = 1$$

οπότε η εφαπτομένη της C_g στο $M(0, g(0))$ έχει εξίσωση

$$y - g(0) = g'(0)(x-0) \Rightarrow y - 1 = 1\cdot x \Rightarrow y = x+1$$

iv) α΄)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{G(x)-G(0)-\dfrac{x^2}{2}-x} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+1}}{g(x)-x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{g(x)-x-1} = +\infty$$

διότι g κυρτή άρα η C_g βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη $y = x+1$, δηλαδή $g(x) \geq x+1 \Rightarrow g(x)-x-1 \geq 0$ και το $=$ μόνο για $x = 0$

β΄)

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{g(x^2)+\text{συν}^2 x-2}{x^2-x}\cdot\ln x\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{g(x^2)-1+\text{συν}^2 x-1}{x(x-1)}\cdot\ln x\right) =$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x-1}\left(\frac{g(x^2)-1}{x^2}-\frac{\text{ημ}^2 x}{x^2}\right)\right]\cdot x\ln x = -1(1-1)\cdot 0 = 0$$

v) Θέτω $\phi(x) = f(x) + g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$

g κυρτή $\Rightarrow g'$ γνησίως αύξουσα και f γνησίως αύξουσα, άρα

ϕ ως άθροισμα γνησίως αυξουσών είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1

$$f((e^x-1)^2) + g'((e^x-1)^2) = f(x^2-2x) + g'(x^2-2x) \Rightarrow$$

$$\phi((e^x-1)^2) = \phi(x^2-2x) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} (e^x-1)^2 = x^2-2x$$

$$\Leftrightarrow (e^x-1)^2 - x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = 0$$