Άσκηση 34

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = (2x-1)\ln x - x + 1$, $x > 0$.

i) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Επιπλέον δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(e) = e^2 - e$ για την οποία ισχύει $\dfrac{xf'(x)\ln x + f(x)}{x} = \left(\dfrac{2x}{x^{f(x)}} - \dfrac{1}{x^{f(x)}}\right)e^{x^2-x}$, $x > 1$.

ii) Να δείξετε ότι $f(x) = \dfrac{x^2-x}{\ln x}$ για κάθε $x > 1$.

Δίνεται η συνάρτηση $\Phi(x) = \begin{cases} f(x) & , \ x > 1 \\ \alpha & , \ x = 1 \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

iii) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η Φ να είναι συνεχής.

Έστω $\alpha = 1$

iv) Να δείξετε ότι η Φ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

v) Να μελετήσετε την Φ ως προς τη μονοτονία.

vi) Αν επιπλέον η Φ είναι κυρτή, να λύσετε την εξίσωση $\Phi(x^2+1) - \Phi(x+1) = \Phi(x^2) - \Phi(x)$.

Λύση

i)

$$g(x) = (2x-1)\ln x - x + 1, x > 0$$
$$g'(x) = 2\ln x + \frac{2x-1}{x} - 1 = 2\ln x + 1 - \frac{1}{x}$$
$$g''(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$$

άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = g'(x) \Leftrightarrow x = 1$

x	0	1	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$

$$OE$$
$$g(1) = 0$$

οπότε $g(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$ και το $=$ μόνο για $x = 1$

ii) Για $x > 1$ έχουμε

$$\frac{xf'(x)\ln x + f(x)}{x} = \left(\frac{2x}{x^{f(x)}} - \frac{1}{x^{f(x)}}\right)e^{x^2-x}$$
$$\frac{xf'(x)\ln x + f(x)}{x} = \frac{2x-1}{x^{f(x)}}e^{x^2-x}$$
$$(f'(x)\ln x + \frac{1}{x}f(x))e^{f(x)\ln x} = (2x-1)e^{x^2-x}$$
$$(f(x)\ln x)'e^{f(x)\ln x} = (x^2-x)'e^{x^2-x} \Rightarrow (e^{f(x)\ln x})' = (e^{x^2-x})'$$

άρα

$$e^{f(x)\ln x} = e^{x^2-x} + c$$

για $x = e$ έχουμε

$$e^{f(e)} = e^{e^2-e} + c \Rightarrow c = 0$$

Συνεπώς

$$f(x)\ln x = x^2 - x \implies f(x) = \frac{x^2-x}{\ln x}$$

iii) Για $x > 1$ η Φ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών.

για να είναι συνεχής, πρέπει να είναι συνεχής στο 1, άρα πρέπει

$$\Phi(1) = \alpha = \lim_{x\to 1}\Phi(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{\frac{1}{x}} = 1$$

iv)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\Phi(x)-\Phi(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{x^2-x}{\ln x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x-\ln x}{(x-1)\ln x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-1-\dfrac{1}{x}}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4x-1}{\ln x+1+1}=\frac{3}{2}$$

άρα $\Phi'(1)=\dfrac{3}{2}$

v) Για $x>1$ έχουμε

$$\Phi'(x)=\frac{(2x-1)\ln x-(x^2-x)\dfrac{1}{x}}{\ln^2 x}=\frac{(2x-1)\ln x-x+1}{\ln^2 x}=\frac{g(x)}{\ln^2 x}>0$$

και Φ συνεχής στο 1, άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

vi)

$$\Phi(x^2+1)-\Phi(x+1)=\Phi(x^2)-\Phi(x)\Leftrightarrow\Phi(x^2+1)-\Phi(x^2)=\Phi(x+1)-\Phi(x)$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=\Phi(x+1)-\Phi(x)$, $x\in[1,+\infty)$

Η αρχική εξίσωση γίνεται $h(x^2)=h(x)$

η Φ είναι κυρτή στο $[1,+\infty)$, επομένως η Φ' είναι γνησίως αύξουσα άρα για κάθε $x\geq 1$ ισχύει

$$x+1>x\Leftrightarrow\Phi'(x+1)>\Phi'(x)\Leftrightarrow\Phi'(x+1)-\Phi'(x)>0$$

Συνεπώς $h'(x)=\Phi'(x+1)-\Phi'(x)>0$ για κάθε $x\geq 1$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και 1-1.

$$h(x^2)=h(x)\Leftrightarrow x^2=x\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow x(x-1)=0\overset{x\geq 1}{\Leftrightarrow}x=1$$