Άσκηση 35

i) Να λυθεί η εξίσωση $10^{x^3-x} - 10^{2x-2} = -(x^3-x)^3 + (2x-2)^3$, $x \in \mathbb{R}$ (1).

ii) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = xe^{x-2027}$ και $g(x) = \alpha x e^{x-2027} - \beta e^{x-2027}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε η f να έχει παράγουσα τη g.

Έστω $\alpha = \beta = 1$

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \rho_1$ και $x = \rho_2 + 2025$, όπου ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$ οι ρίζες της εξίσωσης (1).

Λύση

i)

$$10^{x^3-x} - 10^{2x-2} = -(x^3-x)^3 + (2x-2)^3$$

$$10^{x^3-x} + (x^3-x)^3 = 10^{2x-2} + (2x-2)^3$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x) = 10^x + x^3,\ x \in \mathbb{R}$

$h'(x) = 10^x \ln 10 + 3x^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα και 1-1

οπότε η εξίσωση γίνεται

$$h(x^3-x) = h(2x-2) \Leftrightarrow x^3 - x = 2x - 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1\ ,\ x = -2$$

ii) Για να είναι η g παράγουσα της f πρέπει $g'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x) = \left(\alpha x e^{x-2027} - \beta e^{x-2027}\right)' = \alpha e^{x-2027} + \alpha x e^{x-2027} - \beta e^{x-2027} \Rightarrow$$

$$g'(x) = \alpha x e^{x-2027} + (\alpha - \beta) e^{x-2027}$$

Πρέπει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$\alpha x e^{x-2027} + (\alpha - \beta) e^{x-2027} = x e^{x-2027}$$

- Για $x = 0$ έχουμε $\alpha \cdot 0 + (\alpha - \beta) e^{-2027} = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$
- Για $x = 2027$ έχουμε $2027\alpha + (\alpha - \beta) = 2027 \Leftrightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \beta = 1$

άρα $g(x) = (x-1)e^{x-2027}$.

iii)

$$E(\Omega) = \int_{\rho_1}^{\rho_2+2025} |f(x)|\,dx = \int_{-2}^{2026} |f(x)|\,dx =$$

$$\int_{-2}^{0} -f(x)\,dx + \int_{0}^{2026} f(x)\,dx =$$

$$\Big[-g(x)\Big]_{-2}^{0} + \Big[g(x)\Big]_{0}^{2026} = -g(0) + g(-2) + g(2026) - g(0) =$$

$$2025e^{-1} + 2e^{-2027} - 3e^{-2029}$$