Άσκηση 36

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{x-2} = 2$ και

$$e^{x+1} - 1 \leq (x+1)f(x) \leq \text{εφ}(x+1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(2) = 0$, $f(-1) = 1$ και να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M\left(2, f(2)\right)$.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = (x^2-1)e^{x^2+x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-1, 2)$.

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_1, +\infty)$, όπου $x_1 \in (0, 1)$.

iv) Να υπολογίστε, αν υπάρχει, το όριο $\lim\limits_{x\to x_1} \dfrac{\text{ημ}x - x}{g'(x)}$.

Λύση

i) Θέτω $h(x)=\dfrac{f(x)}{x-2} \Rightarrow f(x)=h(x)\cdot(x-2)$

f συνεχής στο $x=2$ άρα $f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}[h(x)\cdot(x-2)]=2\cdot 0=0$

$$e^{x+1}-1\leq (x+1)f(x)\leq \text{εφ}(x+1)$$

Για $x+1>0$ έχουμε

$$\frac{e^{x+1}-1}{x+1}\leq f(x)\leq \frac{\text{εφ}(x+1)}{x+1}$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{e^{x+1}-1}{x+1}\overset{u=x+1}{=}\lim_{u\to 0^+}\frac{e^u-1}{u}\overset{DLH}{=}\lim_{u\to 0^+}\frac{e^u}{1}=1$$

και

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{\text{εφ}(x+1)}{x+1}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{\text{συν}^2(x+1)}=1$$

άρα από Κριτήριο Παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1$

Για $x+1<0$ έχουμε

$$\frac{e^{x+1}-1}{x+1}\geq f(x)\geq \frac{\text{εφ}(x+1)}{x+1}$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{e^{x+1}-1}{x+1}\overset{u=x+1}{=}\lim_{u\to 0^-}\frac{e^u-1}{u}\overset{DLH}{=}\lim_{u\to 0^-}\frac{e^u}{1}=1$$

και

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{\text{εφ}(x+1)}{x+1}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{\text{συν}^2(x+1)}=1$$

άρα από Κριτήριο Παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=1$

Αφού $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=1$ και η f είναι συνεχής ισχύει $f(-1)=1$

Είναι $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=2$

άρα η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο 2 είναι $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Rightarrow y=2x-4$

ii)

$$g(x)=(x^2-1)e^{x^2+x+1}$$

$$g'(x)=e^{x^2+x+1}(2x^3+x^2-1)$$

Θέτω $\phi(x)=2x^3+x^2-1\ ,x\in\mathbb{R}$

$\phi'(x)=6x^2+2x=2x(3x+1)$ $\phi'(x)=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=-\dfrac{1}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		x_1		$+\infty$
ϕ'		$+$	0	$-$	0			$+$	
ϕ	$-\infty$	$\nearrow$	$T.M.$ $-\frac{26}{27}$	$\searrow$	$T.E.$ -1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Η ϕ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική και $\phi(0)=-1<0$ και $\phi(1)=2+1-1=2>0$

άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\phi(x_1)=0$ και ϕ γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ άρα μοναδικό

Επειδή η μέγιστη τιμή στο $(-\infty,0]$ είναι το $-\dfrac{26}{27}<0$, η ϕ είναι αρνητική σε όλο το $(-\infty,0]$. Στο διάστημα $[0,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και μηδενίζεται στο $x_1 \in (0,1)$ άρα

- $\phi(x)<0$ για κάθε $x \in (-\infty,x_1)$
- $\phi(x)>0$ για κάθε $x \in (x_1,+\infty)$

$g'(x)=e^{x^2+x+1}\cdot\phi(x)$ και $e^{x^2+x+1}>0$ άρα το πρόσημο της g' είναι ίδιο με αυτό της ϕ

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	OE $g(x_1)$	$\nearrow$	$+\infty$

iii) Για $x>0$ ισχύει $|ημx|<x \Rightarrow ημx-x<0 \overset{x_1>0}{\Rightarrow} ημx_1-x_1<0$

- $x<x_1 \implies \phi(x)<0 \implies g'(x)<0$
- $x>x_1 \implies \phi(x)>0 \implies g'(x)>0$

Επομένως

- $\displaystyle\lim_{x\to x_1^-}\frac{ημx-x}{g'(x)}=\lim_{x\to x_1^-}(ημx-x)\frac{1}{g'(x)}=+\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to x_1^+}\frac{ημx-x}{g'(x)}=\lim_{x\to x_1^+}(ημx-x)\frac{1}{g'(x)}=-\infty$

άρα το όριο $\displaystyle\lim_{x\to x_1}\frac{ημx-x}{g'(x)}$ δεν υπάρχει