Άσκηση 37

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν

- $e^{-x} f'(x) = g'(x) - g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = g(0) = 0$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x) - \dfrac{g(x)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή.

ii) Να δείξετε ότι $f(x) = \dfrac{g(x)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

iii) Αν η $y = x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να δείξετε ότι

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{xg(x) - x^2 e^x} = -\frac{1}{2}.$$

Επιπλέον, δίνεται $g'(x) > g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv) Να δείξετε ότι $f(1) < \displaystyle\int_0^1 f(e^x) dx < f(e)$.

v) Να δείξετε ότι $0 < \displaystyle\int_0^1 e^{1-x} g(x) dx < g(1)$.

vi) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{\int_0^1 e^{-2t} f'(t) dt}{x - 1} + \dfrac{f(\alpha) - f(\text{ημ}\alpha)}{x} = 1$, $\alpha > 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

Λύση

i) h συνεχής στο $\mathbb{R}$ και

$$h'(x) = f'(x) - \frac{g'(x)e^x - g(x)e^x}{(e^x)^2} = f'(x) - \frac{e^x(g'(x) - g(x))}{e^{2x}} =$$

$$f'(x) - \frac{g'(x) - g(x)}{e^x} = f'(x) - f'(x) = 0$$

συνεπώς η $h(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

ii) h σταθερή στο $\mathbb{R}$ άρα $h(x) = c$

για $x = 0$ έχουμε $h(0) = f(0) - \dfrac{g(0)}{e^0} = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow$

$f(x) - \dfrac{g(x)}{e^x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{g(x)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$

iii) Η $y = x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = -2$

οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{xg(x) - x^2e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)e^x}{xf(x)e^x - x^2e^x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x f(x)}{xe^x(f(x) - x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{f(x) - x} \right) =$$

$$1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}$$

iv) $f'(x) = \dfrac{g'(x) - g(x)}{e^x} > 0$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

για $x \in [0, 1]$ ισχύει

$$0 \le x \le 1 \Rightarrow 1 \le e^x \le e \underset{f \nearrow}{\Longleftrightarrow} f(1) \le f(e^x) \le f(e)$$

και το = ισχύει μόνο για $x = 0$ και $x = 1$ άρα

$$\int_0^1 f(1)dx < \int_0^1 f(e^x)dx < \int_0^1 f(e)dx \Rightarrow f(1) < \int_0^1 f(e^x)dx < f(e)$$

v)

$$\int_0^1 e^{1-x} g(x)dx = e\int_0^1 \frac{g(x)}{e^x}dx = e\int_0^1 f(x)dx$$

$$0 \le x \le 1 \underset{f \nearrow}{\Longleftrightarrow} f(0) \le f(x) \le f(1) \Rightarrow 0 \le f(x) \le f(1)$$

και το = ισχύει μόνο για $x = 0$ και $x = 1$ άρα

$$\int_0^1 0dx < \int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 f(1)dx \Rightarrow 0 < \int_0^1 f(x)dx < f(1)$$

Άρα

$$0 < \int_0^1 f(x)dx < \frac{g(1)}{e} \Rightarrow 0 < e\int_0^1 f(x)dx < g(1) \Rightarrow 0 < \int_0^1 e^{1-x}g(x)dx < g(1)$$

vi) Θέτω $\phi(x) = \left(\int_0^1 e^{-2t}f'(t)dt\right)x + (f(\alpha) - f(\eta\mu\alpha))(x-1) - x(x-1)$

Η ϕ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική και

$\phi(0) = -(f(\alpha) - f(\eta\mu\alpha)) < 0$ αφού $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha > \eta\mu\alpha \overset{f \text{ γν. αυξ.}}{\Rightarrow} f(\alpha) > f(\eta\mu\alpha)$

$\phi(1) = f(1) > 0$ διότι

$$e^{-x}f'(x) = g'(x) - g(x)$$

$$e^{-2x}f'(x) = e^{-x}g'(x) - e^{-x}g(x) = (g(x)e^{-x})'$$

άρα

$$\int_0^1 e^{-2t}f'(t)dt = [g(t)e^{-t}]_0^1 = \frac{g(1)}{e} - g(0) \overset{g(0)=0}{=} \frac{g(1)}{e} = f(1)$$

Επειδή $1 > 0 \overset{f \text{ γν. αυξ.}}{\Rightarrow} f(1) > f(0) = 0$

οπότε από Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $\phi(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.