Άσκηση 38

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- $f'(x)f(x)=x(x+1)e^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(1)=e$, $f(\alpha)<0$ για $\alpha<0$

i) Να δείξετε ότι $f^2(x)=x^2\cdot e^{2x}$, $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να δείξετε ότι $f(x)=xe^x$, $x\in\mathbb{R}$.

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ έχει δύο ρίζες.

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xe^{x-\alpha}=\alpha$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, όπου $-\dfrac{1}{e^{\alpha+1}}<\alpha<0$.

v) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{-\kappa}^{\kappa}(xe^x)dx \neq 0$ για $\kappa\neq 0$.

Λύση

i) $f'(x)f(x) = x(x+1)e^{2x} \Rightarrow 2f'(x)f(x) = (2x^2+2x)e^{2x} \Rightarrow (f^2(x))' = (x^2e^{2x})'$

Άρα $f^2(x) = x^2e^{2x} + c$

για $x = 1$ έχουμε $f^2(1) = e^2 + c \Rightarrow c = 0$

οπότε $f^2(x) = x^2e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$

ii) $f^2(x) = (xe^x)^2 \Rightarrow |f(x)| = |xe^x|$

$xe^x = 0 \Rightarrow x = 0$, άρα $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

- Στο $(0, +\infty)$ η f είναι συνεχής, άρα διατηρεί πρόσημο. Αφού $f(1) = e > 0$, τότε $f(x) = xe^x$ για κάθε $x > 0$.
- Στο $(-\infty, 0)$, η f είναι συνεχής, άρα διατηρεί πρόσημο. Αφού $f(\alpha) < 0$ για $\alpha < 0$, τότε $f(x) = xe^x$ για κάθε $x < 0$.
- Για $x = 0,\ f(0) = 0$.

Συνεπώς, $f(x) = xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) $f^2(x) = f(x) \Rightarrow f(x)(f(x) - 1) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ ή $f(x) = 1$

- $f(x) = 0 \Rightarrow xe^x = 0 \Rightarrow x = 0$.
- $f(x) = 1$

  $f(x) = xe^x \Rightarrow f'(x) = (x+1)e^x$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

το $1 \notin f((-\infty, -1])$ άρα η $f(x) = 1$ δεν έχει καμία λύση στο $(-\infty, -1]$

το $1 \in f((-1, +\infty))$ άρα η $f(x) = 1$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(-1, +\infty)$ και f γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$, άρα μοναδική

Συνολικά η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες.

iv)

$$xe^{x-\alpha} = \alpha \Leftrightarrow x\frac{e^x}{e^\alpha} = \alpha \Leftrightarrow xe^x = \alpha e^\alpha \Leftrightarrow f(x) = f(\alpha)$$

$$-\frac{1}{e^{\alpha+1}} < \alpha < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{e \cdot e^{\alpha}} < \alpha \Leftrightarrow -\frac{1}{e} < \alpha e^{\alpha} < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{e} < f(\alpha) < 0$$

$f(\alpha) \in f(A_1)$ άρα υπάρχει μία ακριβώς ρίζα $x_1 \in (-\infty, -1]$ ώστε $f(x_1) = f(\alpha)$

$f(\alpha) \in f(A_2)$ άρα υπάρχει μία ακριβώς ρίζα $x_2 \in (-1, +\infty)$ ώστε $f(x_2) = f(\alpha)$

Συνεπώς, η εξίσωση $f(x) = f(\alpha)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες

v)

$$\int_{-\kappa}^{\kappa} xe^{x}dx = \left[xe^{x}\right]_{-\kappa}^{\kappa} - \int_{-\kappa}^{\kappa} e^{x}dx = \kappa e^{\kappa} + \kappa e^{-\kappa} - \left(e^{\kappa} - e^{-\kappa}\right)$$

Θέτω $h(\kappa) = \kappa e^{\kappa} + \kappa e^{-\kappa} - \left(e^{\kappa} - e^{-\kappa}\right)$, $\kappa \in \mathbb{R}$

$$h'(\kappa) = \left(e^{\kappa} + \kappa e^{\kappa} - e^{-\kappa} + \kappa e^{-\kappa}\right) - \left(e^{\kappa} + e^{-\kappa}\right) = \kappa\left(e^{\kappa} - e^{-\kappa}\right)$$

- Αν $\kappa > 0$ τότε $e^{\kappa} > e^{0} = 1$ και $e^{-\kappa} < e^{0} = 1$, άρα $e^{\kappa} - e^{-\kappa} > 0 \Rightarrow h'(\kappa) > 0$.
- Αν $\kappa < 0$, τότε $e^{\kappa} < 1$ και $e^{-\kappa} > 1$, άρα $e^{\kappa} - e^{-\kappa} < 0 \Rightarrow h'(\kappa) > 0$

κ	$-\infty$		0		$+\infty$
h'		$+$	0	$+$	
h	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

$h'(\kappa) > 0$ για κάθε $\kappa \neq 0$ και h συνεχής στο 0 άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Οπότε για κάθε $\kappa \neq 0$ ισχύει $h(\kappa) \neq h(0) = 0$ άρα $\int\limits_{-\kappa}^{\kappa} (xe^{x})dx \neq 0$ για $\kappa \neq 0$