Άσκηση 39

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 συν\dfrac{1}{x} & , \ x \neq 0 \\ α & , \ x = 0 \end{cases}$.

i) Να βρεθεί η τιμή του $α$ ώστε η f να είναι συνεχής.

Έστω $α = 0$

ii) Να δείξετε ότι ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f'(x) - ημ\dfrac{1}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$.

iii) Να δείξετε ότι η g είναι συνεχής στο 0.

iv) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $κ \in \left(\dfrac{1}{2π}, \dfrac{1}{π}\right)$ ώστε $ημ\dfrac{1}{κ}\left(2κ \cdot σφ\dfrac{1}{κ} + 1\right) = -\dfrac{5}{2π}$.

v) Να λυθεί η εξίσωση $g'(x) = f''(x)$ στο $\left(\dfrac{1}{2π}, \dfrac{1}{π}\right)$.

Λύση

i) Για $x \neq 0$ η f είναι συνεχής πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Έχουμε για $x \neq 0$

$$\left|\text{συν}\frac{1}{x}\right| \leq 1 \Rightarrow \left|x^2\text{συν}\frac{1}{x}\right| \leq x^2 \Rightarrow -x^2 \leq x^2\text{συν}\frac{1}{x} \leq x^2$$

με $\lim\limits_{x\to 0}(-x^2) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ άρα από Κριτήριο Παρεμβολής

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x^2\text{συν}\frac{1}{x}\right) = 0$$

άρα για να είναι συνεχής πρέπει $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) \Rightarrow \alpha = 0$

ii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\text{συν}\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0}\left(x\text{συν}\frac{1}{x}\right)$$

Για $x \neq 0$ είναι

$$\left|x\text{συν}\frac{1}{x}\right| \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq x\text{συν}\frac{1}{x} \leq |x|$$

με $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ άρα από Κριτήριο Παρεμβολής

$$\lim_{x\to 0}\left(x\text{συν}\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f'(0) = 0$$

Άρα ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ με εξίσωση $y = 0$

iii) Για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \left(x^2\text{συν}\frac{1}{x}\right)' = 2x\text{συν}\frac{1}{x} + \text{ημ}\frac{1}{x}$

Οπότε $g(x) = f'(x) - \text{ημ}\frac{1}{x} = 2x\text{συν}\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(2x\text{συν}\frac{1}{x}\right) \overset{(ii)}{=} 0 = g(0)$ άρα η g είναι συνεχής στο 0

iv) ΘΜΤ για την f στο $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$

άρα υπάρχει $\kappa \in \left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$ ώστε

$$f'(\kappa) = \frac{f\left(\frac{1}{\pi}\right) - f\left(\frac{1}{2\pi}\right)}{\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2\pi}} = \frac{\frac{1}{\pi^2}\text{συν}\pi - \frac{1}{4\pi^2}\text{συν}2\pi}{\frac{1}{2\pi}} = \frac{-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2}}{\frac{1}{2\pi}} = \frac{-\frac{5}{4\pi^2}}{\frac{1}{2\pi}} = -\frac{5}{2\pi}$$

$$f'(\kappa) = -\frac{5}{2\pi} \Rightarrow 2\kappa\text{συν}\frac{1}{\kappa} + \text{ημ}\frac{1}{\kappa} = -\frac{5}{2\pi} \underset{\text{ημ}\frac{1}{\kappa} \neq 0}{\overset{\frac{1}{\kappa} \in (\pi, 2\pi)}{\Rightarrow}} \text{ημ}\frac{1}{\kappa}\left(\frac{2\kappa\text{συν}\frac{1}{\kappa}}{\text{ημ}\frac{1}{\kappa}} + 1\right) = -\frac{5}{2\pi} \Rightarrow$$

$$\text{ημ}\frac{1}{\kappa}\left(2\kappa \cdot \text{σφ}\frac{1}{\kappa} + 1\right) = -\frac{5}{2\pi}$$

v) Για $x \in \left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$ έχουμε

$$g(x) = f'(x) - \text{ημ}\frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = f''(x) + \text{συν}\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$g'(x) = f''(x) \Rightarrow f''(x) + \frac{1}{x^2}\text{συν}\frac{1}{x} = f''(x) \Rightarrow \frac{1}{x^2}\text{συν}\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \text{συν}\frac{1}{x} = 0$$

$x \in \left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right) \Rightarrow \frac{1}{x} \in (\pi, 2\pi)$ άρα $\frac{1}{x} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{3\pi}$