Άσκηση 4

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} -x^2 \ln x + x + 1 & , \ x > 0 \\ \kappa & , \ x = 0 \\ e^x + \lambda & , \ x < 0 \end{cases}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$,

όπου $\kappa = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(\dfrac{t^2}{4} \eta\mu \dfrac{2}{t} - \dfrac{t-2}{2} \right)$.

i) Να δείξετε ότι $\kappa = 1$ και $\lambda = 0$.

ii) Να δείξετε ότι ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(0,1)$.

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \rho$, $\rho > 2$ είναι αδύνατη.

iv) Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο, με τετμημένη $x_0 \in (2,3)$.

v) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\alpha)}{x-1} - \dfrac{f(\beta)}{x-2} = 0$, $\alpha < x_0 < \beta$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(1,2)$, όπου x_0 η ρίζα της $f(x) = 0$.

vi) Να λυθεί η εξίσωση $f\left(e^{x-1}\right) \cdot f\left(\eta\mu \dfrac{\pi x}{2}\right) = 4$ στο $(-\infty, 1]$.

Λύση

i)

$$\kappa = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t^2}{4}\eta\mu\frac{2}{t} - \frac{t-2}{2}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t^2}{4}\eta\mu\frac{2}{t} - \frac{t}{2} - 1\right) \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u\to 0}\left(\frac{\eta\mu u}{u^2} - u - 1\right) \overset{DHL}{=}$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 3u^2 + 2u}{2u} \overset{DHL}{=} \lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u - 6u + 2}{2} = 1$$

Η f είναι συνεχής στο 0 άρα

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Rightarrow \lim_{x\to 0^-}(e^x + \lambda) = f(0) \Rightarrow 1 + \lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

ii)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2\ln x + x + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2\ln x + x}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+}(-x\ln x + 1) = 1$$

διότι $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x - 1}{x} \overset{DHL}{=} \lim_{x\to 0^-} e^x = 1.$$

Άρα $f'(0) = 1$, επομένως ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο $M(0,1)$.

iii) Είναι $f'(x) = \begin{cases} -2x\ln x & , \ x > 0 \\ e^x & , \ x \leq 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Ο.Μ.
$f(1) = 2$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x = 1$ με $f(1) = 2$

Επομένως $f(x) \leq f(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δηλαδή $f(x) \leq 2 < \rho \in (2, +\infty)$, άρα η εξίσωση $f(x) = \rho$ είναι αδύνατη.

iv) $0 \notin f(A_1)$ άρα η $f(x) = 0$ δεν έχει καμία ρίζα στο $(-\infty, 1])$

$0 \in f(A_2)$ άρα η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (1, +\infty)$ αφού είναι γνησίως φθίνουσα

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [2,3] \\ f(2) = -4\ln 2 + 3 > 0 \\ f(3) = -9\ln 3 + 4 < 0 \end{array}\right\} \overset{\text{ΘΒ}}{\Rightarrow} x_0 \in (2,3) : f(x_0) = 0$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο, με τετμημένη $x_0 \in (2,3)$.

v) Θέτω $g(x) = f(\alpha)(x-2) - (x-1)f(\beta)$

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ συνεχής στο } [1,2] \\ g(1) = -f(\alpha) < 0 \\ g(2) = -f(\beta) > 0 \end{array}\right\} \overset{\text{ΘΒ}}{\Rightarrow} \text{ υπάρχει } \xi \in (1,2) : g(\xi) = 0$$

το πρόσημο της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	x_0	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$+$	0	$-$

Ακόμη η g είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού άρα η ρίζα είναι μοναδική.

vi) Θέλουμε να λύσουμε στο $(-\infty, 1]$ την εξίσωση $f(e^{x-1}) \cdot f\left(\eta\mu\dfrac{\pi x}{2}\right) = 4$

Έχουμε ότι $f(x) \le 2$ για κάθε x και το $=$ για $x = 1$

οπότε

$$f(e^{x-1}) \le 2 \quad \text{και το} = \text{για } e^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f\left(\eta\mu\frac{\pi x}{2}\right) \le 2 \quad \text{και το} = \text{για } \eta\mu\frac{\pi x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 4k+1 \ , k \in \mathbb{Z} \ , \ k \le 0$$

Είναι

$$x \le 1 \Leftrightarrow e^{x-1} \le 0 \Leftrightarrow f(e^{x-1}) > 0$$

και

$$-1 \le \eta\mu\frac{\pi x}{2} \le 1$$

άρα $f\left(\eta\mu\dfrac{\pi x}{2}\right) > 0$ οπότε $f(e^{x-1}) \cdot f\left(\eta\mu\dfrac{\pi x}{2}\right) \le 4$ και το $=$ για $x = 1$.